Incontro numero 03

Prima di cominciare a trattare l'argomento di oggi: la TEORIA DEGLI INSIEMI, cerchiamo di capire fin da subito il processo che sta alla base di una teoria matematica.

Assomiglia un po' a quello che si fa disponendo di un mazzo di carte.
A priori ciò che è rappresentato sulle singole carte non significa nulla di più di un insieme di figure strane.
Si inizia con il dare a ciascuna carta un nome: re di cuori, regina di picche, fante di danari, ecc.
E non significa ancora nulla.
Poi si "*inventano*" delle regole del gioco: con lo stesso mazzo di carte posso infatti giocare a briscola o a tre-sette, basta cambiare le regole.
Decise quali regole seguire, si inizia la partita.

Non vorrei mancare di rispetto a nessuno, ma anche in Matematica si segue un procedimento analogo.
Pensiamo alla Geometria.
Si nominano gli <<oggetti primitivi>>: punto, retta, piano.
Tutti "*sappiamo/pensiamo di sapere*" cosa sono, ma qualsiasi loro rappresentazione grafica è solo un modello di qualità piuttosto scadente dell'idea che abbiamo in testa.
Sono cioè oggetti del nostro pensiero.
Si danno allora delle regole che non si fa difficoltà ad accettare.
Ai miei tempi tali regole si chiamavano <<postulati>>, oggi vengono chiamate anche <<assiomi>> ed il metodo che si segue vien detto: <<assiomatico>>.

Per me gli "assiomi" erano le "regole del corretto ragionare", le regole, cioè, che precedono la Matematica.
Grosso modo, erano i risultati della Logica.
Io capivo meglio la suddivisione che segue:

- il ragionare correttamente: assiomi.
  Quante volte si è sentito dire: <<contadino, scarpe grosse e cervello fino>>?.
- il decidere – sempre rispettando le regole del corretto ragionare - quale Teoria Matematica si vuole approfondire: postulati.

Ma non fa nulla, l'importante è capire di che cosa si sta parlando.

Continuiamo con l'esempio della Geometria.

Quella che viene dall'antica Grecia: la Geometria Euclidea, assume, come uno dei suoi postulati, che per un punto al di fuori di una retta passa una ed una sola retta parallela alla retta data.
Da questo postulato è stato poi dedotto - in modo logico - che la somma degli angoli di un qualsiasi triangolo è sempre = 180° .
Tale risultato ha assunto nel tempo una importanza notevole.
Perfino a livello religioso veniva affermato che, se l'Uomo possiede un risultato perfetto, allora esiste la Perfezione, il che rappresentava una sorta di dimostrazione matematica dell'esistenza di Dio.
Ma le rette parallele non si incontrano mai, e l'infinito è lontano anche per il matematico.

È per questo che nel tempo si sono ripetuti i tentativi di sostituire il postulato delle parallele con qualche altro postulato più vicino alla nostra comprensione/dimensione, e da esso dedurre il comportamento delle rette parallele come teorema, come conseguenza – cioè - di un postulato più accettabile.
Per questo, attorno al 1850, due ricercatori: Bolyai e Lobachevsky, hanno fatto un tentativo: hanno negato il postulato delle parallele.

> **Bolyai ha addirittura negato l'esistenza di rette che siano parallele ad una retta data, ovviamente passanti per un punto esterno alla retta stessa**
> **Lobachevsky ha invece assunto che, per un punto esterno alla retta data, di rette parallele distinte ce ne sono due.**

L'attesa era di arrivare a delle contraddizioni, costruendo così una <<*dimostrazione per assurdo*>> della verità del postulato delle rette parallele.
Ma tale assurdo non si è verificato.

Il primo, negando l'esistenza di rette parallele, ha trovato, come conseguenza logica, che la somma degli angoli di un triangolo doveva essere maggiore di 180°, al punto da indurre a parlare di <<eccesso sferico>>.
Perché?
Perché la geometria che ne è uscita è la geometria della sfera, la geometria con la quale devono fare i loro conti sia i marittimi che gli aeronautici.

Il secondo, invece, postulando l'esistenza di due rette parallele distinte – sempre passanti per un punto esterno ad una retta data – trova come conseguenza logica che la somma degli angoli di un triangolo è sempre inferiore ai 180°.
Si parla allora di geometria iperbolica.

Nascevano così le Geometrie Non-Euclidee.

Cioè, quello che era "certezza" per i tempi di Euclide non è più "Verità" per la Matematica di oggi.

Se devo misurare il terreno dove costruire una casa è sufficiente utilizzate la Geometria di Euclide, ma se devo volare da Roma a New York io DEVO utilizzare la geometria della sfera, cioè una Geometria Non-Euclidea, per calcolare la rotta da tenere e la strada da fare.

Che cosa cambia?
Le regole del gioco, cioè i postulati che giocano il ruolo di "*verità di base*", su cui costruire tutto l'edificio della teoria.

Ovviamente, scegliendo un certo numero di postulati, si deve presumere che non ce ne siano due tali che il secondo neghi ciò che dice il primo.
Cioè:

> **nella scelta dei postulati è necessario fare attenzione che fra loro non esistano delle incompatibilità.**

E se si dovesse, ad un certo punto, scoprire delle incompatibilità non viste prima?
La risposta è ovvia:

bisogna rifare l'intero insieme di postulati in modo da eliminare ogni assurdo.

Quanto detto lo troveremo applicato già negli Insiemi, che adesso andiamo a presentare.

TEORIA DEGLI INSIEMI

Che cos'è un insieme?

A rigore non lo so: è un concetto primitivo, i cui comportamenti devono essere definiti da un insieme di postulati.

Nella pratica, conviene ancorarsi alla vita quotidiana , dando degli esempi al fine di stimolare l'intuizione.

Parleremo allora di:

- **Collezione dei libri che ho comperato per i miei studi**
- **Collezione dei libri che in questo momento sono sui miei scaffali**

Non è detto che siano la stessa cosa …

- **Abitanti residenti in un certo istante a Trieste**
- **Insieme delle automobili BMW grigio chiaro che in un certo istante sono sul territorio della Provincia di Trieste**
- **Ecc.**

A livello introduttivo un <<insieme>> viene equiparato ad una <<collezione>>, e tale insieme viene considerato ben definito ogni qual volta viene assegnato un criterio per decidere se un oggetto (anche solo del pensiero), detto <<elemento>>, <u>appartiene o no</u> alla collezione data.

NB: chiamarlo "insieme" o "collezione" è lo stesso, altrimenti si sarebbe potuto parlare di TEORIA DELLE COLLEZIONI, e risolvere tutto senza preoccupazioni!
È per questo che lo si assume come concetto primitivo.

Ci troviamo cioè di fronte a due parole nuove:

INSIEME ed ELEMENTO.

Non solo, ma l'ELEMENTO può APPARTENERE all'insieme, oppure no.
Con questo abbiamo stabilito una forma di gerarchia fra gli oggetti che stiamo costruendo:

un elemento può appartenere ad un insieme, ma non il viceversa.

Detto "a" un elemento ed "M" un insieme, scriveremo:

$a \in M$ **per dire che << l'elemento "a" appartiene all'insieme "M">>**

$a \notin M$ **per dire che << l'elemento "a" non appartiene all'insieme "M">>**

Consideriamo ora i due insiemi seguenti:

$$\mathbf{M} = \{1, 2, 3\} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ogni elemento di M è anche elemento di N.
Ma ….. non posso dire che M appartenga ad N.
Abbiamo visto che solo un elemento può "appartenere" ad un insieme, ma un insieme non può appartenere ad un altro insieme: ***la scala gerarchica lo impedisce*****.**

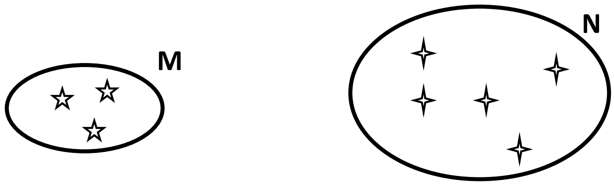
Allora, si cambia nome e si dice:

M è incluso in N , e si scrive: $M \subset N$ per dire che ogni elemento di M è anche elemento di N, ma non viceversa.

oppure: $M \subseteq N$ per dire che ogni elemento di M è anche elemento di N, ma che il viceversa non è escluso.

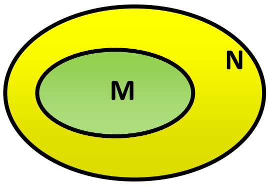
Ovviamente la fantasia ci suggerisce anche qualche rappresentazione grafica al fine di aiutare la costruzione della teoria.

Facciamo riferimento ai Diagrammi di Venn:



per i quali ogni insieme è rappresentato da una curva chiusa, e gli eventuali elementi possono essere rappresentati da dei punti all'interno della curva chiusa.

Così, il dire che $M \subset N$ potrà essere rappresentato dalla figura:



In tal modo gli elementi possono essere qualsiasi, non solo oggetti che la nostra fantasia possa materialmente elencare.

Ma, dati i "mattoni", perché questi si trasformino in "casa" è necessario saper fare – con essi - delle operazioni.

Cosa possiamo allora fare con gli insiemi?
Molte operazioni, che ricordano molto da vicino i connettivi della Logica:

"e" "o" "non" "se …. allora …." ecc.

Non è un caso, questa è proprio l'applicazione della Logica agli Insiemi:

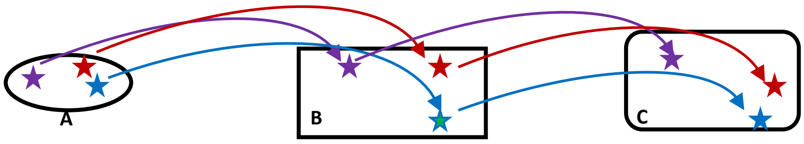
- **Uguaglianza di due insiemi**

  Due insiemi A e B si diranno <<uguali: A = B>> se gli elementi dell'uno sono tutti e soli gli elementi del secondo.

  Cioè: sono lo stesso insieme visto da due punti di vista diversi.

- **Equivalenza fra insiemi**

  Dati più insiemi A , B , C, …. questi si diranno <<equivalenti: A ⇔ B ⇔ C >> se è possibile creare una corrispondenza univoca fra i loro elementi tale che, quando gli elementi di uno sono esauriti, altrettanto accade agli elementi di tutti gli altri insiemi.



- **Insieme vuoto ∅**

  Iniziamo con il dare un esempio:

  consideriamo l'insieme delle "mie" Ferrari, che io conservo nel "mio" garage.

  Ho libertà di pensiero, quindi posso pensarlo, e posso anche affermare <u>che un tale insieme esiste in quanto appartiene al mondo delle mie idee, ma che non ha elementi</u>.

  Non possedendo né una Ferrari né un garage, potrei anche affermare che <u>un tale insieme non esiste</u>.

  Ma – come vedremo parlando di "numeri" – è più conveniente dire che l'insieme esiste ma è vuoto: è privo di elementi.

  Simbolicamente, l'insieme vuoto viene richiamato con il simbolo: ∅.

- **Insieme Universo**

  Anche in questo caso procediamo per esempi.

  Quante volte si sente dire: <<*Ma …. di che cosa stai parlando*?>>

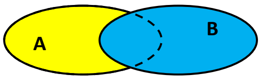
  E solo dopo la precisazione richiesta, si comprende cosa voleva dire l'interlocutore.

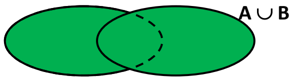
  Altrettanto accade per gli Insiemi: non è la stessa cosa se parlo delle BMW grigie che oggi, in un preciso istante, sono sul territorio della Provincia di Trieste [Insieme Universo: automobili], o se parlo dei cavalli che parteciperanno alle corse presso l'Ippodromo di Trieste [Insieme Universo: animali].

  Diremo quindi <<Insieme Universo>> l'insieme che contiene tutti gli elementi che sono conformi con le qualità che usiamo per identificarli.

- **Unione di due insiemi $A \cup B$**

Dati due insiemi A e B, diremo <<unione di questi due insiemi $A \cup B$>> l'insieme che ha, come elementi, gli elementi che appartengono o ad A   o a B   o ad ambedue.

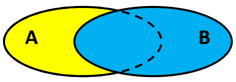


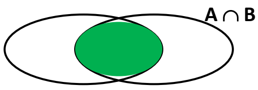


- **Intersezione di due insiemi $A \cap B$ Insiemi disgiunti**

Dati due insiemi A e B, diremo <<intersezione di questi due insiemi>> l'insieme che ha, come elementi, gli elementi che appartengono contemporaneamente sia ad A che a B.

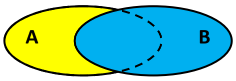
Diremo anche che A e B sono disgiunti fra loro se la loro intersezione è l'insieme vuoto.

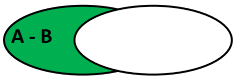


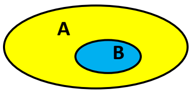


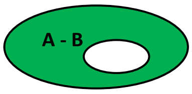
- **Differenza fra due insiemi $A - B$ Insieme complementare di B rispetto ad A**

Dati gli insiemi A e B, diremo differenza fra A e B l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B.
Se $B \subseteq A$, $A - B$ verrà detto <<complementare di B rispetto ad A>>.



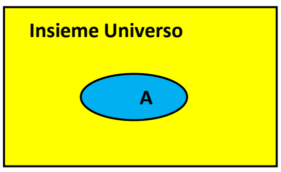


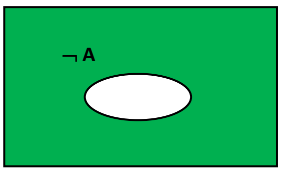




- **Insieme NON-A   o anche $\neg A$**

È l'insieme di tutti gli elementi che appartengono all'Universo in questione, ma che non appartengono ad A.
È anche detto: <<insieme complementare di A>>, senza altre specificazioni.





Una volta introdotto il concetto di Insieme assieme alle sue proprietà, nasce una domanda molto spontanea:

ma quanto abbiamo detto finora, è veramente utile?

A prescindere dal fatto che con sempre maggiore forza questa Teoria viene considerata la teoria-base su cui fondare tutta la Matematica, non rimane che fare un esempio accennando ad una possibile applicazione, facile da realizzare utilizzando un comune computer.

Pensiamo di possedere p.es. l'elenco di tutte le persone che hanno un telefono fisso in Italia.
Cioè: l'Insieme Universo è l'elenco dei possessori – in un certo istante - di telefono fisso in Italia.
Sotto-insiemi appartenenti a questo Insieme Universo sono gli elenchi dei cittadini delle singole città.
È facile immaginare ricerche del tipo:

- Estrarre dall'elenco generale l'elenco di coloro che hanno un telefono a Trieste, cioè identificare gli elementi appartenenti ad un qualunque sotto-insieme incluso nell'Insieme Universo dato.
- Estrarre l'elenco di coloro che hanno una linea telefonica a Trieste o a Roma: si tratta di fare l'unione dei due sotto-insiemi afferenti alle due città.
- Estrarre l'elenco di coloro che hanno una linea telefonica a Trieste e a Roma: si tratta di fare l'intersezione dei due sotto-insiemi afferenti alle due città.
- E così via.

Ma finora tutto è stato dato in modo intuitivo, fondando tutto sul "buon senso" e sulla "evidenza" quotidiana.

Ma non è così.
Volendo fare una Teoria generale è necessario elencare dei nomi: INSIEMI in questo caso, dotati dei loro ELEMENTI,
e dare delle REGOLE DEL GIOCO: gli ASSIOMI (o POSTULATI).
Solo :

- dando un nome agli oggetti primitivi, e
- definendo il loro comportamento tramite le "regole del gioco"

si crea una Teoria sufficientemente generale tale da poter essere considerata valida in tutti i casi oggi conosciuti, ma anche in eventuali casi che – scoperti un domani – dovessero soddisfare gli assiomi dati.

Per quanto riguarda gli insiemi, ci hanno pensato Zermelo e Fraenkel, potenziando la teoria con l'Assioma della Scelta.
L'elenco di tali Assiomi è piuttosto impegnativo, e – nel momento in cui è stato scritto – si era convinti che non generasse dei paradossi.
Ma mancava una dimostrazione, per cui è stato considerato <<coerente>>, salvo prova in contrario.

Ma, tale prova poteva mancare?
Certamente no! Vediamola!

Paradosso di Russell

Nell'ambito della teoria intuitiva, gli insiemi possono essere definiti in modo completamente libero.
Cioè si possono creare insiemi con caratteristiche arbitrarie:

> data una proprietà , essa identifica sempre un insieme, ossia l'insieme di tutti gli oggetti che godono questa proprietà.

Russell immaginò di creare una suddivisione degli insiemi in due categorie:

> <<gli insiemi che tra i loro elementi hanno se stessi>>
> e
> <<gli insiemi che tra i loro elementi non hanno se stessi>>.

Nel primo caso si può fare un esempio: l'insieme di tutti i concetti astratti, che contiene sé stesso, in quanto il concetto di <<concetto astratto>> è un concetto astratto.

Nel secondo caso si può ancora fare un esempio: l'insieme di tutte le tazze da tè.
L'insieme di tutte le tazze da tè non è una tazza di tè, per cui non appartiene all'insieme.

Diciamo ora: ℜ l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi.

Il problema - posto da Russell - è :   << ℜ appartiene o no a sé stesso ? >>.

Supponiamo che ℜ vi appartenga. Si avrebbe:

- ℜ appartiene a sé stesso
- ℜ soddisfa – quindi – la definizione
- ℜ è quindi uno degli insiemi che non appartengono a sé stessi
- ℜ – quindi – non appartiene a sé stesso, il che contraddice il primo enunciato.

Supponiamo che ℜ non vi appartenga. Si avrebbe:

- ℜ non appartiene a sé stesso
- ℜ non soddisfa – quindi – la definizione
- ℜ – quindi – non è uno di quegli insiemi che non appartengono a sé stessi
- ℜ – quindi – è un insieme che appartiene a sé stesso, il che contraddice il primo enunciato.

Qualunque sia la scelta fatta, si arriva ad un paradosso, che potrebbe anche essere espresso in questo modo:
<<l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi appartiene a sé stesso se e solo se non appartiene a sé stesso>>

Ovviamente questo paradosso ha messo in grave crisi tutti i fondamenti della Matematica.

È da questo paradosso, e da altri che nel tempo si sono succeduti, che parte una rifondazione della Teoria degli Insiemi.

Seguendo p.es. le lezioni messe in rete dalla Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, in occasione di un corso estivo di specializzazione dal titolo: <<Geometrical Anatomy of Theoretical Physics>>, il docente Frederic P. Schuller mette in luce le differenze fra la Teoria degli Insiemi come mostrata finora, che lui chiama “*dell’asilo*”, e la moderna Teoria degli Insiemi, fondata nel modo più rigoroso possibile onde evitare paradossi, a cominciare da una certa limitazione nella libertà di definizione di << Insieme>>.

Per quanto ci riguarda, tuttavia, noi rimarremo “*all’asilo*”; per la specializzazione si rimanda a tempi migliori.

Con il prossimo incontro useremo la Teoria degli Insiemi per introdurre il concetto di numero.