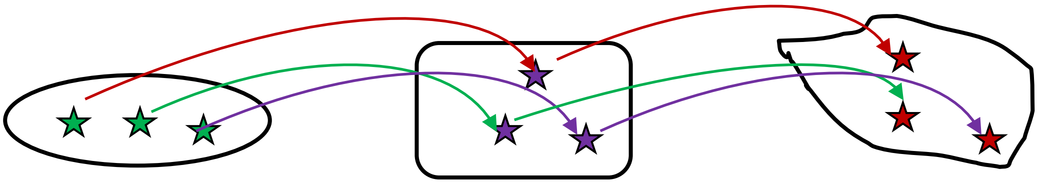
Incontro numero 04

IL CONCETTO DI NUMERO

Parlando di insiemi, abbiamo introdotto un concetto: quello degli insiemi equivalenti.

Consideriamo p.es. i seguenti insiemi:



A: insieme di cavalli

B: insieme di uova marce

C: insieme di frutta esotica

Se ad ogni elemento di A faccio corrispondere UNO ED UNO SOLO elemento di B, e, ad ogni elemento di B faccio corrispondere UNO ED UNO SOLO elemento di C, quando esaurisco gli elementi di A esaurisco – proprio per il fatto che questi insiemi sono fra loro equivalenti – anche gli elementi di B e di C.

Ma il loro contenuto non può essere più diverso!

E così la loro disposizione, che non ha peso alcuno sui ragionamenti che stiamo facendo.

Ciononostante questi insiemi – e tutti gli insiemi a loro equivalenti – hanno una proprietà in comune, che li rende – appunto - <<equivalenti>>.

Nella nostra mente si forma così una idea residua, una proprietà comune, che decidiamo di definire con una parola: TRE.

Nasce così il concetto di NUMERO NATURALE.

Diremo allora $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali:

$$\mathbb{N} = \{1 , 2 , 3 , ...\}$$

Nell'assumere come "primo" numero naturale il numero 1 abbiamo seguito quanto veniva fatto dai nostri progenitori: i Greci ed i Romani.

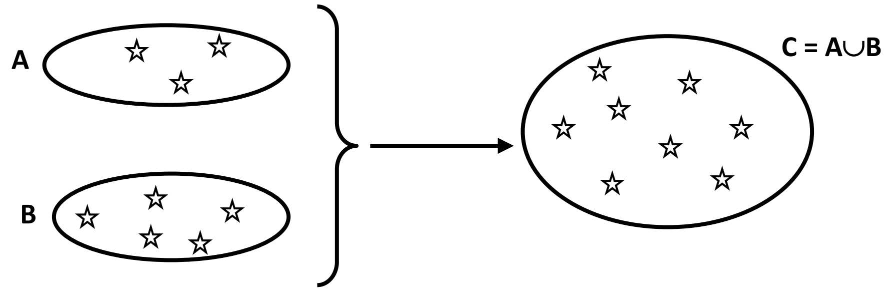
Se sulla tavola non ho arance, è inutile parlare …. del nulla!

Arance non ce ne sono, e tanto basta!

Questa posizione, accanto al modo complicato di rappresentare i numeri (si pensi ai Numeri Romani: I , II , … , X , …), ha rappresentato l'elemento frenante per la ricerca scientifica dell'antichità, tanto che – dopo i fasti dell'antichità – nei primi secoli della nostra Era si è esaurita ed è del tutto scomparsa.

Cosa possiamo fare con i numeri naturali?

Per esempio: l'unione di due insiemi.



Se A è un rappresentante degli insiemi equivalenti che sono associati al numero 3, e B lo è altrettanto per gli insiemi associati al numero 5, l'insieme unione di A e B : $A \cup B = C$ sarà associato al numero: 8.

Scriveremo allora: $3 + 5 = x \qquad x = 8$

L'operazione appena introdotta prende il nome di addizione; i due termini 3 e 5 sono detti addendi ed il risultato finale: 8 è detto somma.

È immediato mostrare che vale la relazione: $3 + 5 = 5 + 3$.

Cioè: l'addizione gode della proprietà commutativa.

Ma non basta.

Consideriamo la seguente addizione: $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 * 7 = 21$

L'operazione <<*addizione ripetuta*>>: $3*7$ prende il nome di moltiplicazione, e gli elementi 3 e 7 sono detti: fattori.

Il risultato: 21 viene detto: prodotto.

Anche in questo caso è immediato osservare che: $3*7 = 7*3$.

Cioè: la moltiplicazione gode della proprietà commutativa.

Ancora non basta.

Scriviamo la seguente moltiplicazione: $3*3*3*3*3 = 3^5 = 243$.

L'operazione <<*moltiplicazione ripetuta*>>: 3^5 prende il nome di elevazione a potenza.

Gli elementi: 3 e 5 prendono, rispettivamente, i nomi di base: 3 e di esponente: 5.

Proprietà molto significativa: l'elevazione a potenza NON gode della proprietà commutativa.

Infatti: $3^5 = 243$; $5^3 = 125$.

Le operazioni viste fin qua prendono il nome di **OPERAZION DIRETTE**, e sono sempre possibili operando sui numeri naturali.

Ma, poteva l'"Uomo" accontentarsi delle Operazioni Dirette?

Certamente NO!

Ed allora ha proposto le **OPERAZIONI INVERSE**:

Operazione inversa dell'addizione: sottrazione.

$3 + x = 8$ che si scrive anche: $x = 8 - 3 = 5$

L'operazione non è sempre possibile in $\mathbb{N}$. Ci saranno delle conseguenze.

Rimanendo in $\mathbb{N}$ non ha senso – infatti - proporre: $8 - 8$

oppure: $8 - 10$.

Operazione inversa della moltiplicazione: divisione.

$3*x = 21$ che si scrive anche: $x = 21:3 = 7$ oppure: $x = 21/3 = 7$.

21 è il dividendo ; 3 è il divisore ; 7 è il quoziente.

L'operazione non è sempre possibile in $\mathbb{N}$. Ci saranno delle conseguenze.

P.es.: rimanendo in $\mathbb{N}$ non ha senso proporre: 21:5

Operazioni inverse dell'elevazione a potenza: $\begin{cases} \text{estrazione di radice} \\ \text{logaritmo} \end{cases}$

In questo caso – poiché l'elevazione a potenza non gode della proprietà commutativa – non è la stessa cosa cercare la base o l'esponente.

Cioè, si hanno due operazioni inverse, diverse una dall'altra:

$x^5 = 243$ Qui si cerca la base: $x = \sqrt[5]{243} = 3$

Estrazione di radice

$3^x = 243$ Qui si cerca l'esponente: $x = \log_3 243 = 5$

Estrazione di logaritmo

Anche in questo caso le operazioni non sono sempre possibili in $\mathbb{N}$.

Vedremo le conseguenze.

AMPLIAMENTI DEL CONCETTO DI NUMERO

Ritorniamo a considerare, ancora una volta, la sottrazione.

$8 - 3 = 5$ in $\mathbb{N}$ l'operazione esiste ed il risultato è soddisfacente.

$8 - 8 =$ non esiste

$8 - 10 =$ non esiste

Ci si potrebbe fermare qui, ma l'Uomo non ama i vincoli, per cui …. cerca di ampliare i propri orizzonti/generalizzare i propri concetti.

Ed allora:

- Dà la dignità di Insieme anche all'insieme privo di elementi, cioè a quello che è stato chiamato: insieme vuoto $\varnothing$.
- Utilizza l'insieme vuoto per "ampliare" il concetto di numero, e definisce lo ZERO.
  Da qui: $8 - 8 = 0$.
- Ma a questo punto, perché non ampliare ancora di più il concetto di numero, e definire dei numeri che precedono lo zero?
  Assumerebbe – in tal modo - significato anche la scrittura: $8 - 10$.
  Per fare questo è però necessario distinguere i numeri naturali già visti dallo zero e dagli "*altri numeri*" che stiamo per introdurre.
  Per scrivere i nuovi numeri, si potrebbe scrivere:

  $\ldots.\ 5_* \quad 4_* \quad 3_* \quad 2_* \quad 1_* \quad 0 \quad 1^* \quad 2^* \quad 3^* \quad 4^* \quad 5^* \ldots$

  distinguendo la posizione dei numeri con la stellina in basso o la stellina in alto

  oppure: …. 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 …

  distinguendo tale posizione con il colore rosso o nero (conti correnti in Banca)

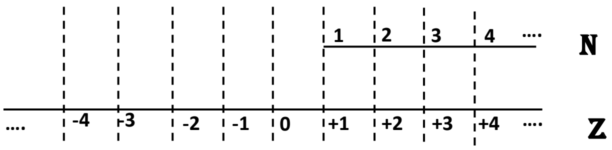
  oppure: $\ldots.\ -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4 \quad +5 \ldots$

  distinguendo tale posizione con il segno – o + (segni di posizione).

Comunque si rappresentino, questi numeri non sono più i numeri di prima.
I numeri che stanno alla destra dello 0 hanno la stessa struttura e lo stesso comportamento di quelli di prima, ma "*non sono*" quelli di prima.
Sono dotati di segno.
Si dice allora che questi numeri sono in relazione di isomorfismo aritmetico con quelli di prima, il tutto per dire che si comportano allo stesso modo, ma non sono loro.
L'uso dei segni - , + come segni di posizione – oltre che come segni di operazione - nasce dalla ricerca di comodità di scrittura, *ma sarebbe opportuno chiarirsi bene le idee prima di usare questa convenzione*.
In Navigazione si usano - come segni di posizione - i segni N e S per la latitudine, ed i segni E o W per la longitudine, ma spesso la mancanza di chiarezza della distinzione fra

- i segni di operazione: addizione o sottrazione, e
- i segni di posizione: destra o sinistra dello 0,

genera dei problemi di comprensione/degli errori nelle operazioni da fare in fase applicativa.
Come il simbolo $\mathbb{N}$ serve a richiamare l'insieme dei numeri naturali (privi di 0), così per indicare l'insieme dei numeri interi relativi verrà usato il simbolo $\mathbb{Z}$.
Cioè: $\mathbb{Z} = \{\ldots\ \ -4\ \ -3\ \ -2\ \ -1\ \ 0\ \ +1\ \ +2\ \ +3\ \ +4\ \ \ldots\}$
Graficamente:



Prima di continuare, vanno però dette alcune cose.
La prima riguarda il numero ZERO.
Per come è stato detto, è "bastato" dare dignità di insieme all'insieme vuoto per considerare tutti gli insiemi equivalenti ad esso, e definire il numero zero.
Ma la storia insegna che tale operazione non è stata assolutamente facile.
In India (negli anni compresi fra il 598 ed il 668 d.C.) era stato inventato il modo "*posizionale*" per rappresentare i numeri, esattamente come facciamo noi oggi.
Spostare una cifra di una posizione a sinistra significava darle un valore 10 volte maggiore.
Nelle posizioni dove non c'erano cifre da inserire, gli Indiani usavano riempire i "buchi" con dei tondini, tanto per rendere certa la posizione della cifra successiva che veniva scritta.
Solo più tardi, a questo tondino indicante <<il nulla>>, è stato dato il significato di numero, e lo si è chiamato: zero.
Entrato nella cultura araba, nel VII Secolo l'Islam assume ed utilizza il metodo posizionale e lo zero per scrivere i numeri, e lo espande fino alle sponde asiatiche ed africane del Mediterraneo.

Solo nel 1202 Leonardo Pisano scrive il suo *Liber Abaci*, che importa in Occidente sia il metodo posizionale che lo zero.
Figlio di *Guglielmo dei Bonacci*, grosso commerciante che con gli Arabi faceva molti affari, il *filius* Bonacci, noto anche come Fibonacci, si reca nell'Africa del Nord, apprende l'arabo, si appassiona alla Matematica araba, e …. porta in Europa, con il suo libro, sia il metodo posizionale che il concetto di zero, come numero.

Il processo non è stato indolore, ed è anche possibile affermare che – con questo libro - Fibonacci ha il merito di aver mostrato come possa esistere anche una Matematica creativa.
Per fare questo, Fibonacci si è lasciato contagiare dalla cultura islamica, a sua volta contagiata dalla cultura indiana e cinese, oltre che ellenistica.
Ha dimostrato cioè che non c'è Scienza senza comunicazione della Scienza, e non c'è cultura senza contagio.

La seconda cosa da dire è definire le operazioni con i numeri interi relativi.

Numeri naturali $\mathbb{N}$	Numeri interi relativi $\mathbb{Z}$
Addizione 8 + 3 = 11	(+8) + (+3) = (+11) i numeri positivi "si comportano" come i numeri naturali (+8) + (-3) = (+5) i numeri negativi "si comportano" esattamente all'opposto dei numeri naturali
Sottrazione 8 - 3 = 5	(+8) - (+3) = (+5) i numeri positivi "si comportano" come i numeri naturali (+8) - (-3) = (+11) i numeri negativi "si comportano" esattamente all'opposto dei numeri naturali
Moltiplicazione 8 ∗ 3 = 24	(+8) ∗ (+3) = (+24) (-8) ∗ (+3) = (-24) (-8) preso per (+3) volte = (-24) (+8) ∗ (-3) = (-24) …. perché continui a valere la proprietà commutativa del prodotto (-8) ∗ (-3) = (+24) cambiando segno due volte, si ritorna al segno + iniziale
Divisione 24 : 3 = 8	(+24) : (+3) = (+8) perché (+8) ∗ (+3) = (+24) (-24) : (+3) = (-8) perché (-8) ∗ (+3) = (-24) (+24) : (-3) = (-8) perché (-8) ∗ (-3) = (+24) (- 24) : (-3) = (+8) perché (+8) ∗ (-3) = (-24)

Riprendiamo adesso in esame la divisione.
Abbiamo appena visto i segni, ma …. questa operazione non è ancora <<sempre possibile>> nell'insieme $\mathbb{Z}$.
In particolare: non esiste, in $\mathbb{Z}$, un numero che sia soluzione di (+21) : (+5).
Ma, l'esperienza di vita quotidiana insegna che è possibile dividere una torta in quattro, o una sbarretta di cioccolata in tre.
Cosa si può fare?
Ampliare il concetto di numero, e riconoscere come numero anche la scrittura: $\frac{1}{3} = {}^{1}/_{3}$.
Numeri di questo tipo, dotati di segno, verranno detti numeri razionali.

Il numero “in alto”: 1, verrà detto: **numeratore**, ed il numero “in basso”: 3, verrà detto: **denominatore**.
Il numero $\frac{1}{3}$ verrà anche detto **numero frazionario** o **frazione**.

L’insieme dei numeri razionali viene indicato con **Q**:

$$\mathbf{Q} = \{\dots \ -\frac{1}{3} \dots \frac{0}{7} \dots \frac{1}{3} \dots\}$$

Operazioni con i numeri razionali

Moltiplicando un numero per 1 il numero dato non cambia.

Ma: $1 = \frac{5}{5} = \frac{23}{23} = \cdots$

È quindi sempre possibile moltiplicare o dividere numeratore e denominatore di una frazione per lo stesso numero (≠ 0) senza che nulla cambi.

Riduzione ai minimi termini:

Consideriamo: $\frac{25}{10} = \frac{5*5}{2*5} = \frac{5}{2}$: dopo la semplificazione, la frazione si dice: <<ridotta ai minimi termini>>.

Riduzione allo stesso denominatore:

consideriamo le due frazioni: $\frac{5}{2}$ e $\frac{1}{3}$.
Per operare con loro, vanno portate al comune denominatore.
I denominatori sono 2 e 3: il minimo comune multiplo è quindi: 6 = 2*3.
Si avrà allora: $\frac{15}{6}$ e $\frac{2}{6}$: a questo punto è facile lavorare con loro.

Confronto fra numeri razionali:

consideriamo le due frazioni: $\frac{5}{2}$ e $\frac{1}{3}$.
Poiché – portate a comune denominatore – diventano: $\frac{15}{6}$ e $\frac{2}{6}$, è facile concludere la maggiore delle due frazioni è la prima.

Frazioni e numeri decimali:

se dividiamo due numeri interi, possiamo ottenere due risultati:

- un numero decimale finito
  $\frac{5}{2} = 2,5$ Infatti: 2,5*2 = 5.
- un numero decimale periodico
  $\frac{1}{3} = 0,3333333 \dots$ Infatti: 3*0,3333333... = 0,9999999...

Dato un qualsiasi numero decimale illimitato periodico, è possibile risalire alla frazione d’origine?

Certamente si.

$$7,4863535353535\dots = 7,486\overline{35} = \frac{748635-7486}{99000}$$

Operazioni da fare con i numeri frazionari:

Addizione: $\frac{5}{3}+\frac{7}{8}=\frac{5*8+7*3}{8*3}=\frac{40+21}{24}=\frac{61}{24}$

Sottrazione: $\frac{5}{3}-\frac{7}{8}=\frac{5*8-7*3}{8*3}=\frac{40-21}{24}=\frac{19}{24}$

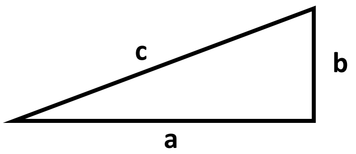
Prodotto: $\frac{5}{3}*\frac{7}{8}=\frac{35}{24}$

Divisione: $\frac{5}{3}:\frac{7}{8}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{7}{8}}=\frac{5}{3}*\frac{8}{7}=\frac{40}{21}$

Si noti come, fino a questo punto, si è tralasciato di parlare di estrazione di radice o di logaritmo.

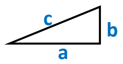
Radici e logaritmi

A tutti è ben noto il Teorema di Pitagora:



$c^2 = a^2 + b^2$

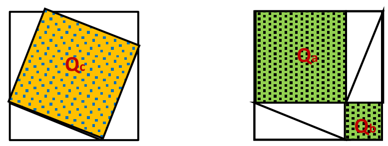
Nell'antica Grecia si poneva l'attenzione sui quadrati, non sui lati.



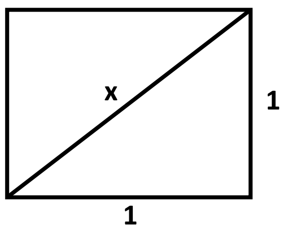
Veniva quindi scritto:

$Q_c = Q_a + Q_b$

Per quanto attiene alla $\sqrt{2}$, sembra fosse un segreto da iniziati il fatto che non esiste alcun numero razionale il cui $()^2$ sia = 2.



Applichiamolo ad un quadrato di lato 1.



$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{2}$

Ma: esiste un numero razionale il cui quadrato sia 2?

Diciamo che esiste, e scriviamolo nella forma: $\frac{m}{n}$, intendendo che la frazione sia ridotta ai minimi termini.

Questo significa: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2\,n^2$

Ora, il secondo membro di questa uguaglianza è pari: contiene un fattore 2.

Affinché valga l'uguaglianza, anche il primo membro: m^2 deve essere pari, e quindi anche m deve essere pari.

Ma, se m contiene almeno un 2, m^2 ne contiene almeno due: $m^2 = m*m$!

Il 2 invece non ci può essere in n, essendo per ipotesi che tutti i fattori comuni sono stati cancellati.

Siamo così arrivati a concludere che:

a sinistra ci devono essere dei numeri 2, ma questi sono in numero pari

a destra di 2 ce n'è invece solo uno, e quindi ce n'è un numero dispari.

L'uguaglianza è impossibile se i fattori sono diversi.

Cioè: non esiste alcun numero razionale il cui quadrato = 2.

Dobbiamo quindi ammettere l'esistenza di numeri che non sono razionali, cioè, che non sono esprimibili come frazione … e quindi neanche come numeri illimitati periodici.

Siamo quindi costretti ad ammettere che esistono numeri decimali illimitati non periodici: I NUMERI IRRAZIONALI.

Numeri razionali & irrazionali generano l'insieme dei numeri che vengono identificati con il nome di: NUMERI REALI.
Il simbolo usato per rappresentare l'insieme dei numeri reali è: $\mathbb{R}$.

Salvo casi particolari, l'estrazione di radice ed il logaritmo sono sempre numeri irrazionali.

Ma quanto detto finora, esaurisce le generalizzazioni finora fatte sul concetto di numero? Certamente no!

Numeri immaginari e numeri complessi.
A me piace pensare che il Matematico abbia dato, alla fine delle sue generalizzazioni, all'Ingegnere i mezzi necessari per elaborare i suoi progetti, e che – subito dopo – si sia posto un'altra domanda:

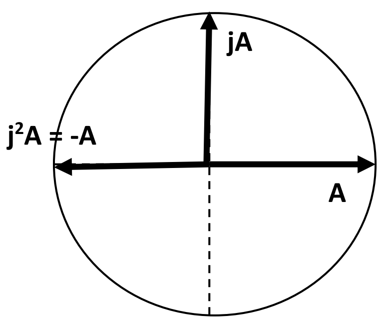
> <<E' ben vero che in $\mathbb{R}$ le regole del prodotto rendono positivo il quadrato di qualsiasi numero ($\neq 0$), sia esso positivo o negativo, ma:
> *è possibile – sull'altare della libertà del pensiero - pensare ad un altro tipo di numero, il cui quadrato sia negativo?*>>

Avendo già consegnato all'Ingegnere i Numeri Reali, il Matematico ha chiamato questi nuovi numeri: Numeri Immaginari, ed ha anche chiamato "i" l'unità immaginaria, quel "numero", cioè, il cui quadrato è proprio -1: $i^2 = -1$.
Ha anche complicato le cose mescolando numeri reali e numeri immaginari: 3 + 4i, e li ha chiamati: numeri complessi.
Ne è nata tutta una teoria, molto interessante ma, come dice il nome: immaginaria.
In qualche modo, oltre che un atto di libertà di pensiero, è risultata essere anche praticamente utile?

Con sorpresa: SI!.

In Fisica abbiamo a che fare con grandezze, come la velocità o la forza, che sono rappresentate delle "frecce": i VETTORI.

Diciamo "j" uno strumento – detto OPERATORE – che agisca sui vettori ruotandoli in senso anti-orario di 90°.
Si potrà avere una situazione del tipo:



Cioè: "j", l'operatore che – dato un vettore – lo ruota di +90°, si comporta proprio come previsto per "i" : l'unità immaginaria ….

Il che equivale a dire che l'uso dell'unità immaginaria permette di gestire - in modo algebrico - le rotazioni in un piano.

…. e l'Elettrotecnica fa un uso molto intenso di questa teoria per portarci in casa luce, calore durante l'inverno e temperature più fresche durante l'estate.

Non è finita, ma qui ci fermiamo, con la speranza di essere riusciti a dare una presentazione – forse non troppo noiosa – dei fondamenti su cui si basa il pensiero matematico.