Incontro numero 07

LA FISICA <<PIU'>> MODERNA

Non voglio neanche pensare di parlare di FISICA MODERNA;
lo scopo di questi appunti è solo quello di introdurre l'argomento, tentando di far "apprezzare", almeno in parte, l'evoluzione che il pensiero fisico ha avuto agli inizi del 1900.

Per seguire la Logica del contenuto verranno riportati anche dei passaggi matematici, che però – durante la discussione - si cercherà alleviarne la pesantezza commentando ampiamente il contenuto.

Newton (1643 - 1727) ha il merito di aver costruito la Meccanica Classica, certamente costellata di successi ma altrettanto certamente rappresentante un <<modello>> per la descrizione del mondo.
Poi abbiamo avuto l'Elettromagnetismo, altro caposaldo della Fisica della 2° metà del 1800, che ha introdotto il concetto delle onde elettro-magnetiche (Equazioni di Maxwell - 1865).
Anche questo è un <<modello>>, MOLTO EFFICIENTE, che "prevede", per la luce:

- **la natura ondulatoria**
- **una velocità nel vuoto pari a:**

$$\mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

dove le quantità sotto radice sono rispettivamente la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del vuoto.

Ricordiamo:

→ **Date due cariche elettriche, queste** $\begin{Bmatrix} \text{se hanno lo stesso segno si respingono} \\ \text{se hanno segno opposto si attraggono} \end{Bmatrix}$ **con una forza che è data da:**

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

dove ε **è la costante dielettrica del mezzo entro il quale sono immerse le cariche.**

→ **La permeabilità magnetica** μ **è (classicamente) legata alla relazione:** $\mu = \frac{B}{H}$ **essendo: B l'induzione magnetica ed H il campo magnetico.**

→ **La velocità della luce in un dato mezzo è espressa da:** $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

In questo incontro ci proponiamo di accennare alla <<Relatività Ristretta>>, e nel dire questa parola la figura principe che viene in mente anche ad un profano è quella di Albert Einstein.
Ma, è proprio vero che sia stato Einstein a "*scoprire*" la <<Relatività>>?

Assolutamente no.

Il primo che ha parlato di Relatività è stato Galileo (1564 - 1642).
Nel momento in cui lo stato "*naturale*" di un corpo – a differenza di quanto pensato nell'antica Grecia - è stato riconosciuto come il "*moto rettilineo uniforme*",

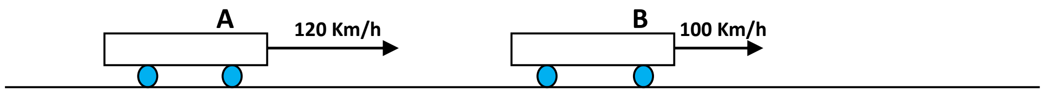
del quale lo stato di "*quiete*" è solo un caso particolare, in un riferimento particolare, in cui la velocità del corpo è uguale a zero,

è sorto il problema:

<<***Velocità, rispetto a chi?***>>

Infatti, parlare di velocità non ha semplicemente "*senso*" se non si precisa "*rispetto a chi*" questa velocità fa riferimento.

Proponiamo un esempio: immaginiamo due automobili in autostrada: A e B.



Tutte e due procedono nella stessa direzione; A ha una velocità – rispetto alla strada – di 120 Km/h ; B, che sta davanti ad A, procede con una velocità di 100 Km/h.

È facile concludere che:

- **stando su A si vede "*A ferma e B avvicinarsi ad A*" con una velocità relativa rivolta "*verso indietro*" di 20 Km/h (non si dimentichi che, in treno, si vedono gli alberi andare indietro, con una velocità uguale e contraria a quella del treno che va avanti)**
- **stando su B si vede "*B ferma ed A avvicinarsi a B*" con una velocità relativa rivolta "*verso avanti*" di 20 Km/h (l'albero "vede", infatti, il treno andare avanti).**

Se invece le macchine fossero andate in direzioni opposte, le due macchine si sarebbero avvicinate ad una velocità relativa di 220 Km/h.

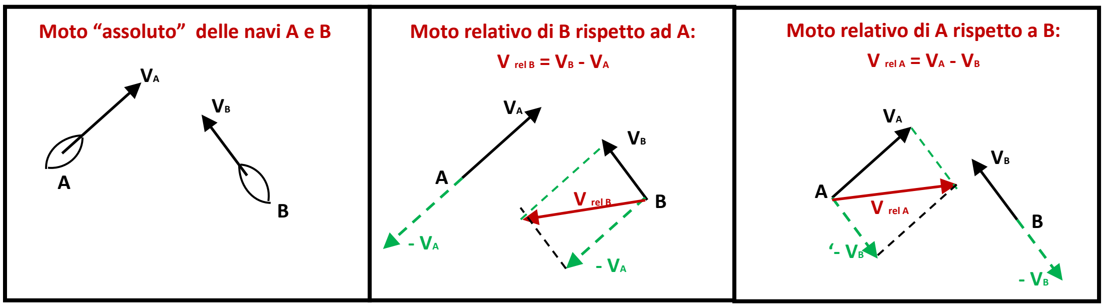
È la differenza fra tamponare una macchina e fare uno scontro frontale.

Prima di continuare, non posso non riportare un aneddoto, che mi ha coinvolto personalmente.
Nel 1953 c'è stata la liberalizzazione del radar come strumento di navigazione (fino a quel momento veniva considerato "segreto militare" della 2° Guerra Mondiale).
Al Nautico, nel '53, sono stati dedicati al radar qualche cosa come 10^m di lezione, durante i quali ci è stato detto che <<il radar è uno strumento che permette di vedere nella nebbia>>.
E, per la sicurezza di bordo, che cosa si poteva pretendere di più che il "VEDERE NELLA NEBBIA"?
Ed infatti, il 1954 ha avuto l'800% delle collisioni fra navi rispetto all'anno precedente, al punto che si è parlato di "collisioni radar-assistite".
Cosa era successo?
Semplice: allora sullo schermo comparivano le immagini a partire – direttamente - dai segnali riflessi dalle navi circostanti.

> ***Oggi, invece, i segnali vengono accumulati su dei Database informatici, e – prima di essere mandati sullo schermo – vengono rielaborati dal computer e mostrati nella forma che più aggrada.***
> **Ma la piena coscienza di <<*che cosa*> si sceglie che venga riportato sullo schermo è e rimane - ancora oggi - un elemento di vitale importanza.**

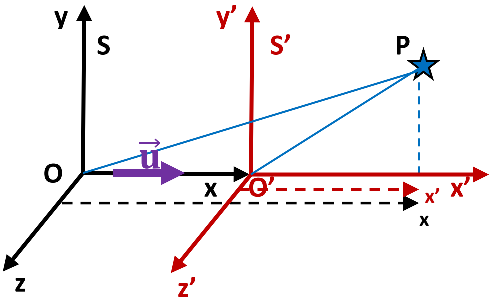
Cioè: sullo schermo si vedeva il "moto relativo" delle navi-bersaglio rispetto a noi.

Ma, confondere il moto relativo con il "moto assoluto": *moto della nave-bersaglio rispetto alla Terra*, portava a fare manovre sbagliate, da cui le collisioni.
Nel mondo il problema è stato risolto immediatamente impostando dei Corsi di Addestramento sui simulatori dell'epoca: i primi Corsi io li ho infatti seguiti a Warsash (Southampton) - Gran Bretagna.
Ritornato in Patria ho proposto di avviare questi Corsi anche da noi, ma … visto che *siamo i migliori del mondo*, abbiamo dovuto aspettare l'affondamento dell'Andrea Doria prima di poter disporre – dopo qualche tempo - di un Centro Radar a Genova.
Graficamente, si ha:



Per "fermare" la nave A senza cambiare nulla nei <u>movimenti relativi</u> è necessario "sommare" a tutte le navi una velocità pari a ($-V_A$): la nave A allora appare ferma, esattamente come appare ai miei occhi quando sono in plancia sulla nave A, e tutte le altre navi circostanti sembrano muoversi secondo la loro velocità relativa.
Lo stesso va fatto per la nave B, se si vuol "pre-*vedere*" cosa vedrebbe una persona in plancia sulla nave B.

Vediamo di tradurre quanto detto in una situazione facile da analizzare:
anziché macchine o navi, prendiamo due sistemi di riferimento inerziali, orientati in modo particolare come appare in figura, e cerchiamo di descrivere quanto vediamo:



O x y z : sistema inerziale **S**
O'x'y'z': sistema inerziale **S'**, in moto – <u>rispetto ad S</u> – con velocità "u" in direzione "**x ≡ x'**".
S ed **S'** fanno partire i cronometri nel momento in cui **O ≡ O'**.
Nell'istante **t**: **O** vede **P** con coordinate: **P(x, y, 0)**
(per semplicità teniamo P nel piano del foglio: <u>z = z' = 0</u>)
O' vede **P** con coordinate: **P(x', y', 0)**
Essendo **OO' = ut**, si può scrivere:

$$x' = x - ut \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad ; \quad t' = t$$

Oppure la trasformazione inversa:

$$x = x' + ut \quad ; \quad y = y' \quad ; \quad z = z' \quad ; \quad t = t'$$

Cioè: avendo il sistema di riferimento S' che si muove in direzione "x ≡ x'", le coordinate y e z del punto P rimangono inalterate nel passaggio da un sistema all'altro, mentre la coordinata x rimane soggetta alla relazione: $x' = x - ut$.
Anche il tempo $t' = t$ rimane inalterato: non dimentichiamo che nella Meccanica di Newton <u>il tempo è</u> – per postulato - <u>una grandezza assoluta</u>, non influenzata dagli eventi che accadono nello spazio.

Non dimenticchiamo, ancora, che – nella Meccanica di Newton – si assume – sempre come postulato - che lo spazio sia euclideo.

Se P si muove – rispetto ad S - con una certa velocità: $\vec{V}(v_x, v_y, v_z)$, rispetto ad S' avrà velocità:

$$\vec{V'}(v'_x = v_x - u \quad , v'_y = v_y \quad , v'_z = v_x)$$

Questi risultati rappresentano, in scrittura matematica, la Relatività di Galileo.

Essi dicono in definitiva che S ed S' "*vedono*" P muoversi con velocità diverse, in funzione del loro moto relativo.
***E questo qualunque sia la natura dell'evento P*, compreso anche un lampo di luce.**

Cioè: la Meccanica di Newton prevede, come logica conseguenza dei suoi postulati, che – misurando la velocità della luce – questa si combini p.es. con la velocità della Terra nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole, dando come risultato valori a volte più piccoli ed a volte più grandi di "c".

Chi poteva confermare o negare questa previsione?

Ovviamente: solo l'esperimento, tanto più che di elementi da mettere in discussione ce n'erano parecchi.

Dato che la luce è un fenomeno ondulatorio, per trasmetterla appariva necessario ammettere che ci debba pur essere qualche cosa che vibra, e si era parlato di Etere Cosmico, un fluido "impalpabile", che non rallentava p.es. il moto dei pianeti attorno al Sole, ma che permetteva alla luce di attraversare distanze "cosmiche" alla velocità di circa 300.000 Km/sec.

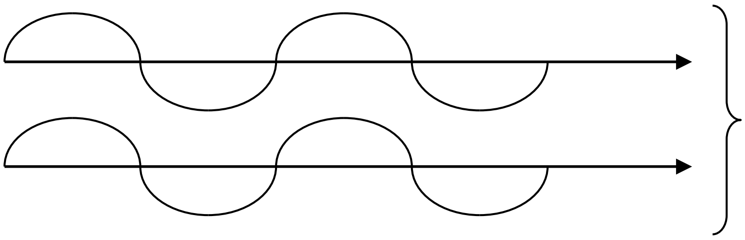
Bisognava però spiegare come mai:

1) per il suono, la sua velocità nell'atmosfera è circa 330 m/sec e nell'acqua circa 1400 m/sec: cioè la velocità cresce con la densità del mezzo.
L'etere cosmico non frenava i pianeti, quindi non era tanto denso da provocare attrito, ma sufficientemente denso per permettere alla luce di propagarsi alla velocità anzidetta.
Entrando nell'atmosfera o nell'acqua, la luce corre di più o di meno?
Oggi si sa che "corre di meno".

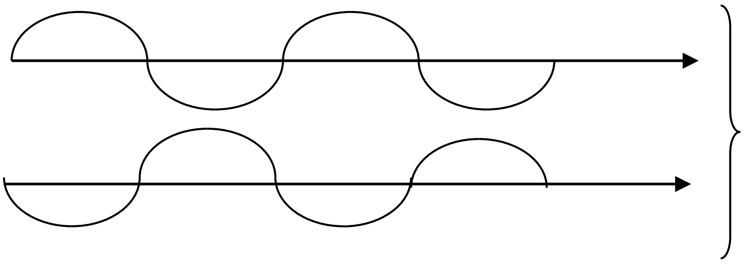
2) il suono è un'onda di pressione longitudinale: l'aria o l'acqua conducono il suono per propagazione di onde di pressione nel senso dello spostamento del suono stesso.
Come mai l'onda e.m. è invece un'onda trasversale, cioè è un'onda per la quale i campi elettrici e magnetici che la compongono oscillano perpendicolarmente alla direzione del moto?
Per avere una tale onda – per il suono – è necessario che il mezzo lungo il quale esso si propaga sia solido, come p.es. le rotaie del treno.
Mettendo l'orecchio sulla rotaia (ipotesi del tutto non consigliabile, se non altro per la sicurezza di chi penserebbe di farlo!) si sente l'arrivo del treno da molto lontano, e le onde elastiche che arrivano sono onde trasversali indotte dalle sollecitazioni prodotte dal treno in corrispondenza delle congiunzioni delle rotaie.

3) quando si parla di <<velocità del suono>> si sottintende <<rispetto al mezzo che lo conduce, in quiete>>.
Ma allora, il valore di "c" è riferito ad un riferimento in quiete rispetto all'Etere Cosmico, il che condurrebbe al concetto di *moto assoluto*, dando spazio a valori relativi della velocità della luce maggiori o minori di "c".
Ma in tal modo avrebbe anche senso parlare di *moto assoluto della Terra*, riferito a questo Etere, capace di riempire tutto lo spazio infinito.

Siamo così arrivati all'Esperimento di Michelson-Morley (1887), mediante il quale si cercava di dare risposta sperimentale ai vari quesiti proposti.
Prima di descriverlo in grandi linee, pensiamo di avere due onde che si sommino fra loro.



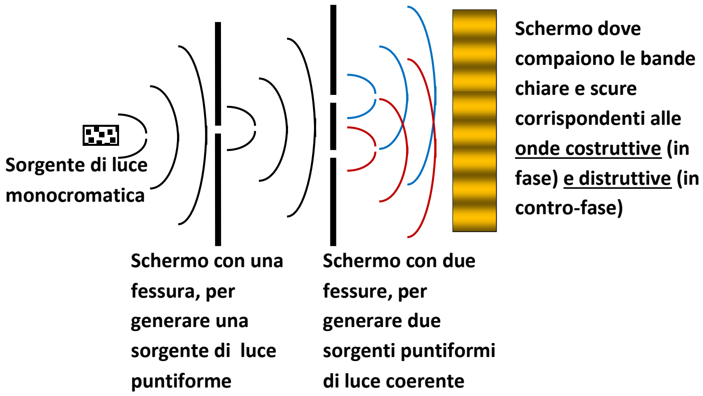
<u>Onde in fase</u>: istante per istante si sommano, per cui nasce un segnale forte.



<u>Onde in contro-fase</u>: istante per istante si sottraggono, per cui nasce un segnale nullo, o molto debole.

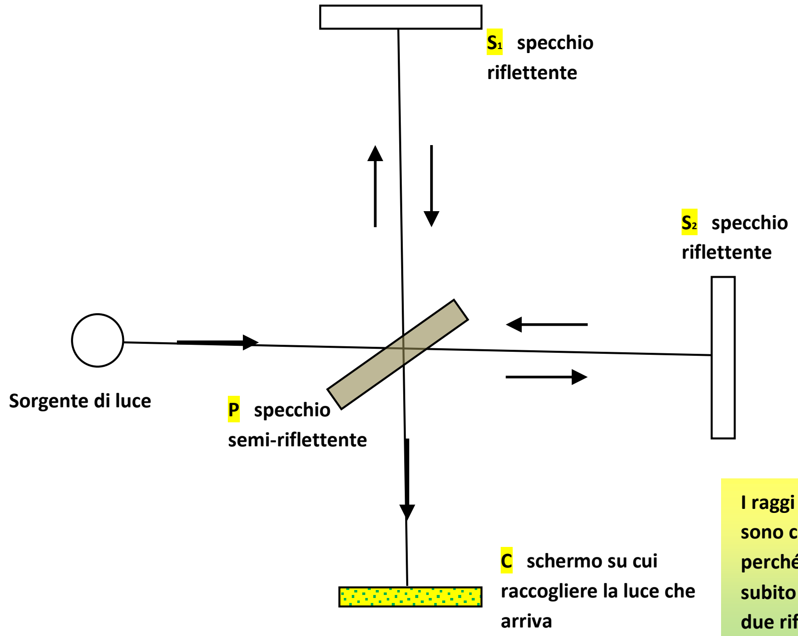
Cioè, sommando due onde, non è detto che il segnale che ne esce sia sempre più forte, anzi esso può addirittura annullarsi.
Applicato alla luce, ne nasce un fenomeno detto <<interferenza della luce>>.

Consideriamo di avere una sorgente di luce monocromatica, e di operare come in figura:



FENOMENO DELLA INTERFERENZA DELLA LUCE

Adesso possiamo accennare all'Esperimento di Michelson-Morley.



I raggi diretti verso C sono confrontabili perché ambedue hanno subito una rifrazione e due riflessioni.

Nell'ipotesi che le distanze $PS_1 = PS_2$, e che la velocità della luce vari in accordo con il moto relativo previsto dalla Relatività di Galileo, la velocità media della luce lungo il tratto PS_1 (andata e ritorno) può differire dalla velocità media lungo il tratto PS_2 al punto da far nascere – sovrapponendo i raggi luminosi - delle bande di interferenza sullo schermo C, e questo soprattutto se p.es. PS_1 è diretto in direzione del moto della luce, e PS_2 in direzione ad esso perpendicolare.

Ripetuto l'esperimento più volte in condizioni ed in tempi diversi, anche per permettere alla Terra di modificare sensibilmente il proprio moto nel suo moto di rivoluzione attorno al Sole, l'effetto previsto non è mai stato osservato.

Ed è questo fallimento che ha costretto i ricercatori ad abbandonare la Fisica Classica per arrivare – con Einstein - ad un nuovo "modello" descrittivo del mondo: la Relatività Ristretta …

… senza però dimenticare i buoni risultati ottenuti ricorrendo alla Meccanica Classica.

Iniziamo innanzi a tutto con il definire quelle che possiamo chiamare le FORZE REALI , ovviamente contrapposte alle FORZE FITTIZIE di origine geometrica, di cui si è accennato in passato:

in Meccanica Classica, le forze reali nascono sempre in coppia, e derivano dalla interazione fra due corpi, la cui intensità diminuisce man mano che aumenta la distanza fra i corpi interagenti.

In questo modo si cerca di dare una definizione operativa di <<riferimento inerziale>.>

Assieme alle "forze reali" possiamo definire anche un OGGETTO ISOLATO : un oggetto che non sia influenzato da alcuna forza reale ….

…. e, dato un oggetto isolato, diremo SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE un riferimento che vede l'oggetto isolato muoversi di moto rettilineo uniforme.

Dopo quanto detto finora, i postulati della **RELATIVITÀ RISTRETTA** possono essere espressi come segue:

1. **LE LEGGI DELLA FISICA SONO LE STESSE IN TUTTI I SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI**

2. **LA VELOCITÀ DELLA LUCE NEL VUOTO È << c >> IN QUALSIASI SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE.**

Il primo postulato implica che:

- Non ha senso parlare di quiete assoluta
- Non esistono velocità assolute
- Non esiste l'Etere
- Lo spazio è riempito di "nulla"
- Per parlare di velocità abbiamo bisogno di disporre di qualche cosa di reale a cui fare riferimento, e la velocità ha senso solo se riferita al sistema di riferimento così definito.

Il secondo postulato implica che:

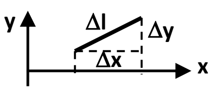
- Tutti gli osservatori misurano la stessa velocità della luce nel vuoto.

È quindi necessario trovare un nuovo approccio, basato sui principi seguenti:

- Non è più possibile accettare i postulati della Meccanica Classica
- La definizione di velocità relativa va modificata al fine di assicurare che la velocità della luce sia sempre la stessa in tutti i sistemi di riferimento
- La nuova formulazione deve essere consistente con il primo postulato (l'equivalenza di tutti i riferimenti inerziali) e le velocità misurate devono essere consistenti con le formule per l'addizione delle velocità.

Prima di proseguire nello sviluppo della Relatività Ristretta, appare conveniente richiamare in modo esplicito i concetti fondamentali della Meccanica Classica, ai quali faremo riferimento:

- i parametri più significativi (*per noi*) usati nella Meccanica Classica per dare la propria descrizione del <<mondo>> sono:
  - LA LUNGHEZZA di un segmento/di un vettore.
    Ricorrendo al Teorema di Pitagora, nel caso del piano è possibile scrivere:



$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = \Delta l^2.$$

Nel caso dello spazio a tre dimensioni si ha invece:

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta l^2$$

Tale lunghezza è un parametro invariabile per qualsiasi osservatore che guardi "quel" segmento/vettore, è cioè UNO SCALARE.

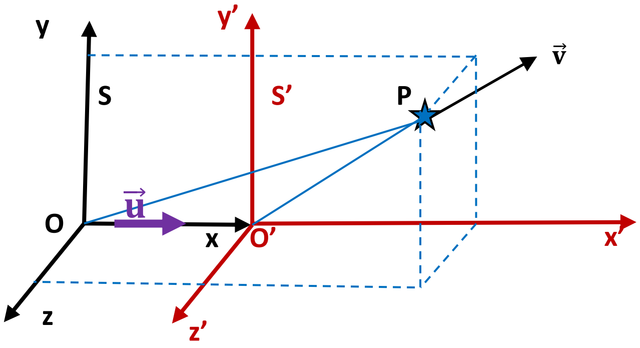
- L'ENERGIA: definita come "capacità di compiere lavoro".
  In mancanza di fenomeni dissipativi (attrito, ecc.), questa si mantiene costante, e modifica solo "la forma" con cui essa può manifestarsi.
  P.es., un vaso di fiori sulla finestra in IV piano ha una certa energia "in più" rispetto allo stesso vaso, quando era sul marciapiede in strada (la "*energia in più*"- fra l'altro - è proprio uguale al lavoro "*che ho fatto io*" per portare il vaso di fiori dal marciapiedi al IV piano).
  Ma sulla finestra il vaso sta fermo, non fa malanni, per cui questa energia - che"può" anche essere liberata - al momento non lo è: si parla allora di ENERGIA POTENZIALE $\mathbf{E_P = mgh}$.
  Se il vaso di fiori cade, "perde" energia potenziale, in quanto si muove verso il basso, ma acquista velocità, ed allora si parla di ENERGIA CINETICA $\mathbf{E_K = \frac{1}{2}mv^2}$.
  In ogni caso, trascurando ovviamente gli attriti con l'aria, la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica è – in ogni istante - una costante: l'energia del vaso di fiori.
- LA QUANTITA' DI MOTO: $\vec{\mathbf{p}} = \mathbf{m}\vec{\mathbf{v}}$.
  Come è ben noto, essere alla guida di una automobile vuota è molto meno impegnativo che essere alla guida della stessa automobile, riempita fino all'inverosimile di oggetti pesanti.
  Magari, provate a frenare per credere!
  Un tale parametro rappresenta una costante del sistema p.es. nel caso di collisioni elastiche.
  È possibile vederlo osservando le biglie usate quando si gioca a bigliardo.
  Quando due biglie collidono, cambiano tutte e due sia velocità che direzione del moto, ma "il sistema delle due biglie", nel suo complesso, non cambia "quantità di moto totale", che viene così a rappresentare una costante del sistema stesso.
- LA DIFFERENZA SULLA NATURA DELLE GRANDEZZE CONSIDERATE.
  Noi parliamo infatti di SCALARI : quando le grandezze sono definite da un numero "che rimane uguale per tutti", e di VETTORI : quando le grandezze sono definite da intensità, direzione e verso, e quindi sono descrivibili o mediante "una freccia" o mediante una "terna ordinata di numeri", che rappresentano le componenti del vettore lungo gli assi cartesiani.
  Cambiando sistema di riferimento cambiano le proiezioni sugli assi secondo regole ben definite.
  Dati due vettori: $\vec{\mathbf{a}} = (\mathbf{a_x, a_y, a_z})$ e $\vec{\mathbf{b}} = (\mathbf{b_x, b_y, b_z})$,
  diremo PRODOTTO INTERNO o PRODOTTO SCALARE la quantità:
  $$\vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{b}} = \mathbf{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}.$$
  Il risultato è uno scalare, da cui il nome dell'operazione.
  Calcoliamoci il prodotto scalare di un vettore con se stesso:
  $$\vec{\mathbf{a}} \bullet \vec{\mathbf{a}} = \mathbf{a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$
  Si trova uno scalare: *il quadrato della lunghezza del vettore $\vec{a}$* , invariante per qualsiasi osservatore.
  Ci sarebbero – è vero – tante altre cose da aggiungere a quelle appena citate, ma quelle che abbiamo elencato sono sufficienti per quanto ci interessa.

➢ **precisiamo infine cosa si intende per <<trasformazione>> delle variabili dinamiche:**

- Si consideri NOTO/MISURATO un set di variabili dinamiche per una particella in un dato riferimento
- Consideriamo inoltre di essere interessati a trovare il valore che le stesse variabili avrebbero in un sistema di riferimento diverso
- Le equazioni che ci permettono procedere ad un tale calcolo prendono il nome di TRASFORMAZIONE.

Ciò premesso, iniziamo con l'esaminare degli esempi concreti nell'ambito della Relatività Galileiana.

TRASFORMAZIONE GALILEIANA



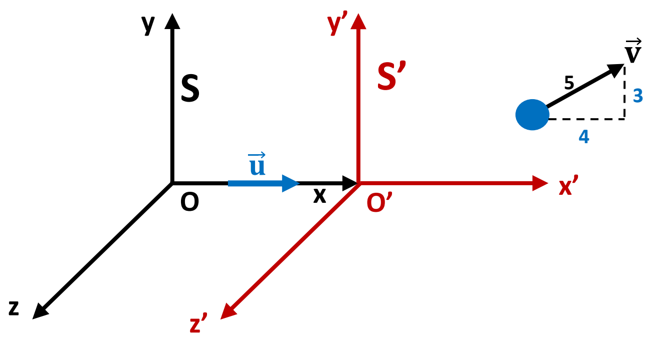
L'evento P questa volta si trova – nell'istante t – in una posizione generica (x, y, z) rispetto ad S, posizione che diventa (x', y', z') in S'.

$\vec{u}$: velocità del sistema O' rispetto ad O

$\vec{v}$: velocità di P rispetto ad S

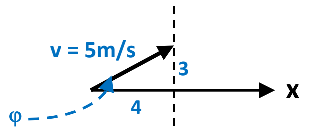
TRASFORMAZIONE DIRETTA (Trasformazione di Galileo)	TRASORMAZIONE INVERSA (Trasformazione inversa di Galileo)
$\begin{cases} x' = x - u\,t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$	$\begin{cases} x = x' + ut \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$
$\begin{cases} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$	$\begin{cases} v_x = v'_x + u \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases}$

Esempio 1



Un osservatore in S osserva una particella che, nell'istante t = 0, si trova in O, e che si muove con velocità costante v = 5 m/s formando un angolo di "arctan(3/4)" con l'asse x.
Trovare la posizione della particella rispetto ad S dopo 2 sec.
Consideriamo un secondo osservatore S' che si muove rispetto ad S con velocità u = 1 m/s in direzione dell'asse x.
Ammesso che valga la trasformazione galileiana, trovare sia la velocità della particella che le sue coordinate in S' nell'istante t = 2 sec.

Soluzione



$\tan\varphi = ¾ \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi = 3/5$ e $\cos\varphi = 4/5$

$\Rightarrow v_x = 4 m/s \quad v_y = 3 m/s \quad v_z = 0 m/s$

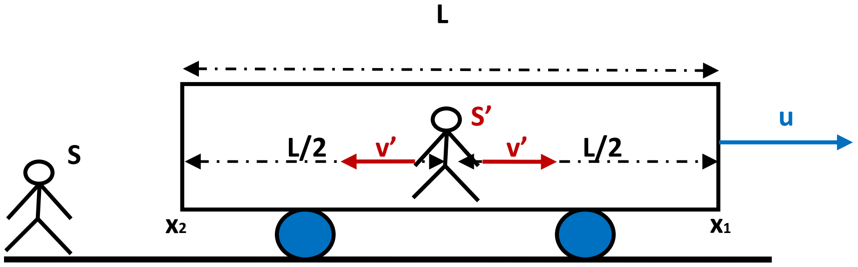
$t = 2 s \Rightarrow x = 8 m \quad y = 6 m \quad z = 0 m$

$u = 1 m/s \quad OO' = 2 m$

$\Rightarrow x' = 6 m \quad y' = 6 m \quad z' = 0 m$

$\Rightarrow v'_{x'} = 3m/s \quad v'_{y'} = 3 m/s \quad v'_{z'} = 0 m/s$

Esempio 2 Concetto di simultaneità



S ed S': osservatori inerziali.

S' lancia, in un certo istante t' = t = 0 , due palle verso le estremità del mezzo su cui sta viaggiando con la stessa velocità "v'".

Le due palle colpiscono le pareti delle estremità del veicolo dopo

$$[(L/2)/v'] = L/(2v') \text{ sec.}$$

Cioè: $t' = L/(2v')$

L'evento (1): la palla colpisce la parete anteriore avviene dopo t' = L/(2v') sec

L'evento (2): la palla colpisce la parete posteriore avviene dopo t' = L/(2v') sec

Gli eventi (1) e (2) sono simultanei.

Cosa vede S? S "vede":

- **Il veicolo che procede con velocità "u"**
- **La palla che cammina in direzione del moto del veicolo ha velocità (u + v')**
- **La palla che cammina in direzione opposta al veicolo ha velocità (u – v')**
- **Diciamo t_1 il tempo impiegato dalla prima palla per toccare la parete anteriore.**
  Il tempo perché la palla raggiunga la parete anteriore è dato da:
  $$(L/2 + u*t_1)/(u + v') = t_1.$$
- **Diciamo t_2 il tempo impiegato dalla seconda palla per toccare la parete posteriore.**
  Il tempo perché la palla raggiunga la parete posteriore è dato da:
  $$(L/2 - u*t_2)/(u - v') = t_2 .$$

Quindi: $L/2 + u*t_1 = t_1*(u + v') \quad ; \quad L/2 - u*t_2 = t_2*(u - v')$

$L/2 = t_1*(u + v' - u) = t_1*v' \quad ; \quad L/2 = t_2*(u - v' + u) = t_2*v'$

$$\Rightarrow \quad t_1 = t_2 = L/(2v') = t'$$

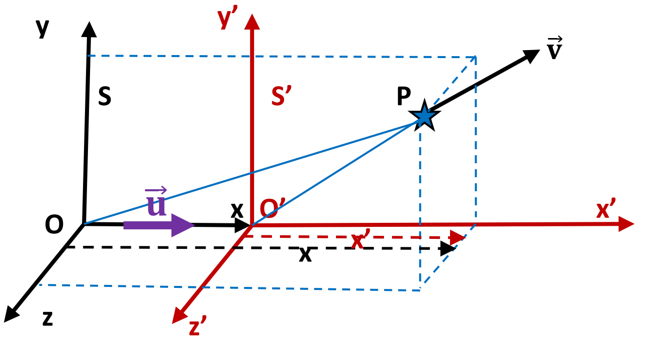
Cioè: anche S vede ciascuna palla toccare la propria parete simultaneamente all'altra.

Ma siamo in Relatività Galileiana.

Assumendo come postulati quelli della Relatività Ristretta, possiamo aspettarci che le trasformazioni - passando da un sistema inerziale ad un altro - cambino anche profondamente. In fondo abbiamo cambiato le "*regole del gioco*", ed adesso dobbiamo "*giocare*" con le nuove regole.

Il problema sta, come detto fin dall'inizio, nel confronto fra previsione teorica e risposta degli esperimenti; i pre-concetti che nel frattempo l'Uomo si è costruito nella vita quotidiana fino ad oggi semplicemente non contano.

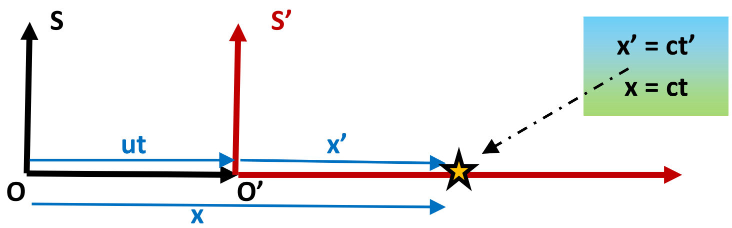
TRASFORMAZIONI DELLA RELATIVITA' RISTRETTA (la figura è quella di prima, ma cambiano i postulati di base)



L'evento P questa volta si trova – <u>nell'istante t</u> – <u>in una posizione generica (x, y, z)</u> rispetto ad S, posizione che diventa (x', y', z') riferita all'istante t' in S'.

$\vec{u}$: velocità del sistema O' rispetto ad O
$\vec{v}$: velocità della particella P rispetto ad S
(che per il momento non viene usata)

Dato il movimento di S' rispetto ad S (y e y' ; z e z' sono sempre paralleli e concordi), è naturale aspettarsi che sia: y' = y ; z' = z.
Che cosa accade per x e t lo stiamo invece per vedere:



Quando O ≡ O' accendo un segnale, che dopo un tempo t (per S) o t' (per S'), si trova nel punto indicato dalla stella ☆.
Per ambedue gli osservatori il valore di "c" è lo stesso.

Le Trasformazioni di Galileo darebbero:

$$x' = x - ut \qquad \text{trasformazione diretta}$$
$$x = x' + ut' \qquad \text{trasformazione inversa}$$
$$t' = t$$

Sono le equazioni da modificare

Data l'equivalenza dei due osservatori inerziali, per passare alla Relatività è necessario <<correggere queste formule>>, applicando ad ambedue <u>la stessa correzione/modifica</u>. In caso contrario, sarebbe possibile distinguere un osservatore dall'altro, cosa questa del tutto inaccettabile (simmetria/equivalenza fra osservatori inerziali).

Scriviamo quindi le equazioni "corrette" moltiplicando per γ , salvo poi cercare la correzione γ :

$$x' = (x - ut)\gamma \qquad \text{trasformazione diretta}$$
$$x = (x' + ut')\gamma \qquad \text{trasformazione inversa}$$

Sono le equazioni modificate, ma bisogna trovare γ

Moltiplichiamo membro a membro queste due relazioni:

$$xx' = \gamma^2\left(xx' + uxt' - ux't - u^2tt'\right)$$

$$1 = \gamma^2\left(1 + u\frac{t'}{x'} - u\frac{t}{x} - u^2\left(\frac{t}{x}\right)\left(\frac{t'}{x'}\right)\right) = \gamma^2\left(1 + \cancel{u\frac{1}{c}} - \cancel{u\frac{1}{c}} - u^2\frac{1}{c}\frac{1}{c}\right)$$

$$1 = \gamma^2\left(1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}}$$

Deriva quindi:

$$\boxed{x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}}$$

Il calcolo diretto di t' dà – inoltre - il seguente risultato:

$$\boxed{t' = \frac{t - u\frac{x}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}}$$

Infatti:

$$\frac{x' + ut'}{x - ut} = \frac{x}{x'} \quad \text{da cui: } x' + ut' = \frac{x^2 - uxt}{x'} \Rightarrow t' = \frac{-x'}{u} + \frac{x^2 - uxt}{ux'}$$

Quindi:

$$t' = -\frac{\frac{x-ut}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}}{u} + \frac{x^2-uxt}{u\frac{x-ut}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}} = -\frac{x-ut}{u\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} + \frac{x(x-ut)\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}{u(x-ut)}$$

$$t' = \frac{x-ut}{u}\left\{-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} + \frac{x}{x-ut}\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}\right\} = \frac{x-ut}{u}\,\frac{-1+\frac{x\left(1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)}{x-ut}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} =$$

$$= \frac{x-ut}{u}\,\frac{-x+ut+x\left(1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right)}{(x-ut)\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{ut-x\left(\frac{u}{c}\right)^2}{u\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{t-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

Le trasformazioni così trovate prendono il nome di Trasformazioni di Lorentz, e lo spazio da esse generato prende il nome di Spazio-Tempo/Cronotopo di Minkowski.

<u>Osservazione</u>: se u << c, si può praticamente dire che $\beta \cong 0$, per cui: $\gamma \cong 1$: ritroviamo la Relatività di Galileo.

Cioè: *per velocità "piccole" (rispetto alla velocità della luce), ritroviamo l'approssimazione classica*.

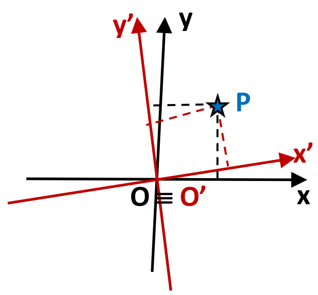
Questo spiega come mai ancora oggi "*noi continuiamo a pensare newtoniano*".

Le leggi di trasformazione – scritte in modo esplicito - sono quindi:

TRASFORMAZIONE DIRETTA (Trasformazione di Lorentz)	TRASFORMAZIONE INVERSA (Trasformazione inversa di Lorentz)
$\beta = \frac{u}{c} \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\begin{cases} x' = \gamma\,(x - u\,t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right) \end{cases}$	$\beta = \frac{u}{c} \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $\begin{cases} x = \gamma\,(x' + u\,t) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{ux'}{c^2}\right) \end{cases}$
A questo punto si dovrebbero riportare le formule che permettono di conoscere – date le componenti di $\vec{v}$ rispetto ad S – le corrispondenti componenti rispetto ad S'.	Ma l'argomento richiede di tener conto di dettagli delicati, da approfondire, per cui si rimanda a più tardi.

Come prima cosa che colpisce l'attenzione di chi guarda è la caduta dell'indipendenza del <<tempo>> dagli avvenimenti che accadono nello <<spazio>>.
Possiamo quindi affermare che ci troviamo ad operare in uno <<spazio-tempo>> unico, a 4 dimensioni, le cui coordinate si trasformano – passando da un sistema di riferimento ad un altro – secondo le leggi indicate.

A volte – nel tentativo di "*spiegare intuitivamente le cose*" - si fa il paragone che segue:



Nel piano, ruotando gli assi attorno alla origine comune O≡O', "lo stesso punto P" presenta due coordinate diverse, legate fra loro da un parametro comune: l'angolo di cui sono stati ruotati gli assi.

Allo stesso modo LE COORDINATE SPAZIO-TEMPORALI (t, x, y, z) DI UN UNICO EVENTO cambiano nel passare da un riferimento all'altro, pur essendo pertinenti - tutte - allo stesso evento.

Prendiamo adesso in esame due eventi successivi, e consideriamo l'intervallo di tempo compreso fra loro:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Osserviamo che - se ammettiamo che $\Delta t = t_2 - t_1$ sia positivo (*il 2° evento è avvenuto dopo il primo*) - nulla vieta "*a priori*" che $\Delta t'$ possa essere negativo:

tutto dipende dalla quantità $\frac{u\Delta x}{c^2}$,

ma questo implicherebbe – dal punto di vista della "FISICA" - che l'ordine con cui vengono osservati i due eventi in S ed in S' appaia invertito.

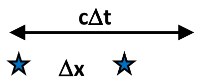
Questo porterebbe a gravi problemi logici, soprattutto nel caso di eventi legati fra loro da relazioni di <<causa – effetto>>, il che significa che <<*non deve essere possibile/opportuno che questo possa accadere*>>.

Ma: quando questo potrebbe accadere?

Quando si è in presenza di due eventi tali che:

$$\Delta t - \frac{u\Delta x}{c^2} < 0 \;\Rightarrow\; c^2 < u\frac{\Delta x}{\Delta t} \;\Rightarrow\; \frac{u}{c} > \frac{c\Delta t}{\Delta x} = \frac{\text{strada percorsa dalla luce nell'intervallo fra i 2 eventi}}{\text{distanza misurata fra i due eventi}}$$

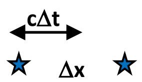
Ammettiamo che sia: $c\Delta t > \Delta x$.



Il rapporto $c\Delta t/\Delta x > 1$, il che equivale a dire che, per avere l'inversione dei tempi, deve essere $u/c > 1$, il che renderebbe $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$ "immaginario".

Il che non appare fisicamente possibile.

Ammettiamo che sia: $c\Delta t < \Delta x$.



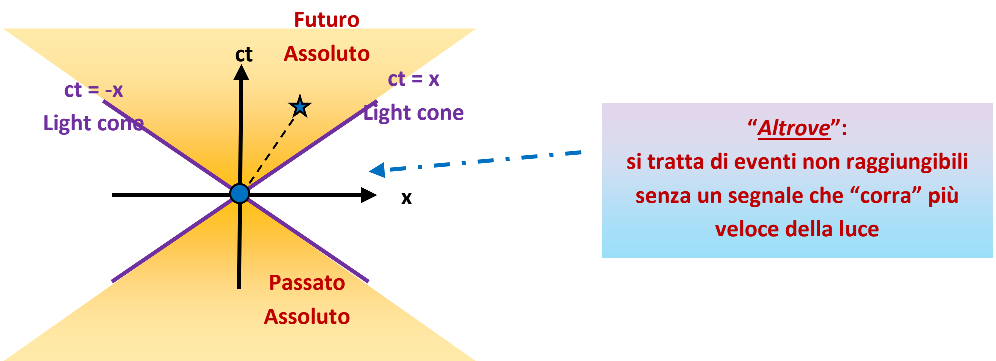
Assurdo
<<nonna – nipote>>
Invertendo i tempi si potrebbe avere il nipote prima della nonna; …. ma, *se la nonna venisse uccisa alla nascita*, come mai potrebbe esistere il nipote?

Il rapporto $c\Delta t/\Delta x < 1$, il che equivale a dire che ci sono margini questo avvenga l'inversione.

Ma allora i due eventi dovrebbero essere tanto lontani fra loro che – per essere collegati – dovrebbero poter disporre di un mezzo che si propaghi ad una velocità superiore a quella della luce.

In tal caso l'assurdo <<nonna – nipote>> depone a favore dell'ipotesi che non esista alcun segnale più veloce della luce.

Quanto detto permette di pensare ad un grafico del tipo che segue:



Cambiamo discorso.

Nel caso della rotazione degli assi nel piano cartesiano si ha un invariante, derivato dal Teorema di Pitagora:

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 \quad : \quad \text{la lunghezza del segmento/vettore}$$

Quale è il corrispondente invariante nel caso relativistico?

$t^2 + x^2$ è del tutto errato, se non altro a causa delle diverse unità di misura.

Quindi: **per identificare un evento X si trova opportuno definire:**

$$x_0 = ct \quad ; \quad x_1 = x \qquad \Rightarrow \qquad \underline{X = (x_0 \,.\, x_1)}\ .$$

Nel <u>caso generale</u> si usa scrivere:

$$X = (x_0\,,\, x_1\,,\, x_2\,,\, x_3)$$

che corrisponde a: $X = (ct, x, y, z).$

Nella Trasformazione di Lorentz, cosa rimane invariante?

Ri-scriviamo le relazioni note, nella forma che ci è più comoda:

$$x' = \frac{x-ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{x-\frac{u}{c}ct}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{x_1-\beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = x_1' \qquad \left(\beta = \frac{u}{c}\right)$$

Similmente: $$x_0' = \frac{x_0-\beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Inoltre: $x'_2 = x_2 \quad ; \quad x'_3 = x_3$

Le leggi di trasformazione sono diventate più simmetriche, e quindi anche più facili da ricordare

Per trovare l'invariante, potremmo provare a calcolarci: $x^2+y^2+z^2+(ct)^2$.

Per essere uno scalare, esso dovrebbe, passando da un riferimento all'altro, rimanere inalterato, ma, è proprio così?

$$x'^2 + \cancel{y'^2} + \cancel{z'^2} + (ct')^2 = \gamma^2\big(x - \beta(ct)\big)^2 + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} + \gamma^2\big((ct) - \beta x\big)^2 =$$
$$= \gamma^2\big(x^2 - 2x\beta(ct) + \beta^2(ct)^2 + (ct)^2 - 2x\beta(ct) + \beta^2x^2\big)$$

da cui:

$$x'^2 + (ct')^2 = \gamma^2\Big(\big(1+\beta^2\big)x^2 + \big(1+\beta^2\big)(ct)^2 - 4x\beta(ct)\Big)$$

Sembra proprio di no, il che conferma che *il prodotto scalare "vecchio" non funziona in questo "spazio nuovo".*

Ma questo porta a concludere che - in questo spazio nuovo a 4 dimensioni - bisogna "inventare" un nuovo tipo di "prodotto scalare", sottolineando così il fatto che tale spazio è uno <u>spazio non Euclideo</u>.

Scegliendo infatti, come prodotto scalare del 4-vector: ((ct), x, y, z) con sé stesso, la nuova definizione dà:

$$\boxed{(ct)^2 - (x^2+y^2+z^2)}$$

e, nel passare da un riferimento all'altro si ottiene:

$$(ct')^2 - x'^2 - \cancel{y'^2} - \cancel{z'^2} = \gamma^2\big((ct) - \beta x\big)^2 - \gamma^2\big(x - \beta(ct)\big)^2 - \cancel{y^2} - \cancel{z^2}$$
$$(ct')^2 - x'^2 = \gamma^2\big((ct)^2 - \cancel{2(ct)\beta x} + \beta^2 x^2\big) - \gamma^2\big(x^2 - \cancel{2x\beta(ct)} + \beta^2(ct)^2\big)$$
$$(ct')^2 - x'^2 = \gamma^2\big((ct)^2 + \beta^2 x^2 - x^2 - \beta^2(ct)^2\big) = \gamma^2\Big(\big(1-\beta^2\big)(ct)^2 - \big(1-\beta^2\big)x^2\Big)$$

Ma:

$$\gamma^2\big(1-\beta^2\big) = \frac{1}{1-\beta^2}\big(1-\beta^2\big) = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2}$$

Al passaggio da un riferimento all'altro la quantità scritta non cambia.

Quindi:

$$(ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2:$$

la quantità indicata rappresenta un invariante.

NELLO SPAZIO [SPAZIO DI MINKOWSKI] IN CUI VALE LA TRASFORMAZIONE DI LORENTZ *"ci si trova quindi costretti ad usare"* LA NUOVA DEFINIZIONE DI PRODOTTO INTERNO o SCALARE.

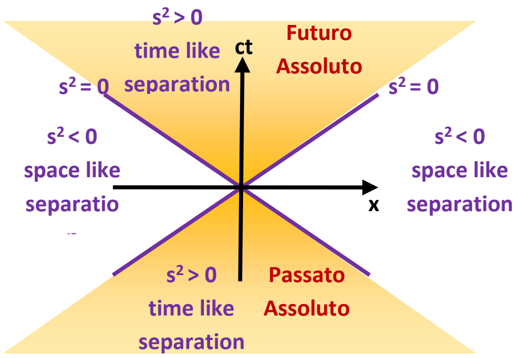
Dati due eventi distinti: A = (ct_A, x_A, y_A, z_A) e B = (ct_B, x_B, y_B, z_B), potremo anche definire come <<intervallo fra i due eventi>> il 4-vector:

$\Delta S = (c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ <<space-time interval>>

Si otterrà la "lunghezza" di questo 4-vector applicando il prodotto scalare su sé stesso:

$$\Delta S \bullet \Delta S = \Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

Si definisce così la seguente suddivisione dello spazio-tempo:



A questo punto si definisce anche, in questo spazio, una nuova entità: il 4-vector, il cui prototipo risulta essere:

$$\mathbf{X} = (x_0, \vec{r})$$

il quale, per definizione, deve rispettare il seguente prodotto scalare:

$$\mathbf{X}\bullet\mathbf{X} = \big(x_0^2 - |\vec{r}|^2\big) = \big(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\big)$$

Nel caso di due four vectors distinti si ha, dati: $\mathbf{X} = (x_0, \vec{r})$; $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{x}_0, \vec{\bar{r}})$
che il prodotto scalare viene definito come segue:

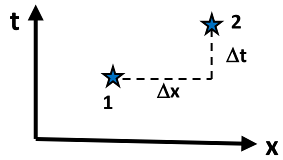
$$\mathbf{X}\bullet\bar{\mathbf{X}} = x_0\bar{x}_0 - x_1\bar{x}_1 - x_2\bar{x}_2 - x_3\bar{x}_3$$

Essendo ambedue dei four-vectors, vale la relazione: $\mathbf{X}\bullet\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X}'\bullet\bar{\mathbf{X}}'$.
Anche in questo caso il prodotto scalare è invariante.

Il fatto che i segni siano << + - - - >> sottolinea il fatto che lo spazio definito dai four vectors è certamente NON euclideo.

Applicazione

Consideriamo – per comodità di rappresentazione - lo spazio a due dimensioni (t, x) .



$\Delta x \rightarrow$ distanza percorsa dalla particella

$\Delta t \rightarrow$ tempo impiegato dalla particella per farlo

$$(\Delta s)^2 = (c\,\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (c\,\Delta t)^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \qquad \text{essendo:}\ \ v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

da cui:

$$\Delta s = c\,\Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$$
$$= c\,\Delta t\,\frac{1}{\gamma_v}$$

NB: per sua natura, Δs è un invariante.

Osservazione: in un riferimento solidale con la particella, *la particella è in quiete rispetto a se stessa*, per cui l'intervallo di tempo assumerà un valore particolare:

$\Delta\tau$ che verrà detto: PROPER TIME

Anch'esso invariante!

da cui:

$$\Delta s = c\,\Delta\tau$$

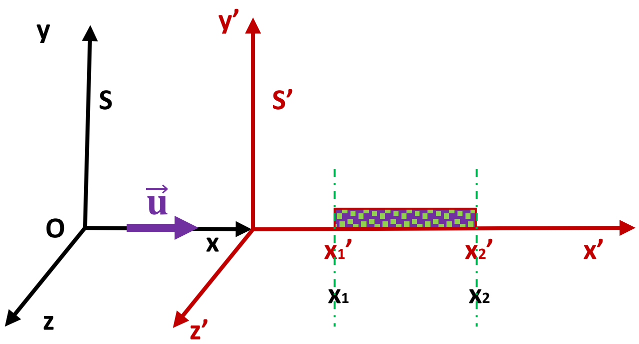
Ne segue che:

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2} = \Delta t\,\frac{1}{\gamma_v}$$

il che equivale a dire: $\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{1}{\gamma_v}$ oppure: $\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \gamma_v.$

Proviamo ora a proporre delle applicazioni, al fine di "*imparare a interpretare*" che cosa ci dicono le formule.

Riprendiamo in esame i due sistemi di riferimento inerziali di cui abbiamo già parlato,



e consideriamo un "regolo" rigido, *fisso p.es. rispetto al riferimento* S'.

Cosa "vede" S?

Ovviamente l'attenzione è rivolta alla lunghezza di questo regolo.

In S' il regolo è in quiete, fermo, per cui è possibile leggere *con calma* le coordinate dei suoi estremi, e dire che la sua lunghezza è data da: $L' = x'_2 - x'_1$.
Questa lunghezza, "*letta con calma*" nel sistema di riferimento rispetto al quale il regolo è in quiete, prende il nome di lunghezza propria del regolo.

Per S il regolo è in movimento, per cui è necessario:

- **per prima cosa determinare le coordinate degli estremi x_1 e x_2 in un certo istante "t"**
- **…. e solo dopo calcolare la lunghezza $L = x_2 - x_1$.**

L'operazione per misurare la lunghezza di un oggetto in moto è quindi diversa dall'operazione per misurare la lunghezza di un oggetto fermo, per cui appare logico e naturale aspettarsi che le due misure diano risposte differenti.

Infatti, nell'istante t è possibile scrivere:

$$x'_2 = \gamma(x_2 - ut) \qquad x'_1 = \gamma(x_1 - ut)$$

da cui: $L' = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma L$

ma: $\gamma > 1 \quad \Rightarrow \quad L < L'$: **contrazione delle lunghezze.**

Analogamente, sopra abbiamo definito tempo proprio τ fra due eventi l'intervallo di tempo che viene misurato in un riferimento rispetto al quale i due eventi si verificano nello stesso punto.

Pensiamo di accendere e spegnere una lampadina, in quiete rispetto ad S, e di misurare l'intervallo $\tau = t_2 - t_1$ **fra i due eventi.**

Cosa vedrà S'?

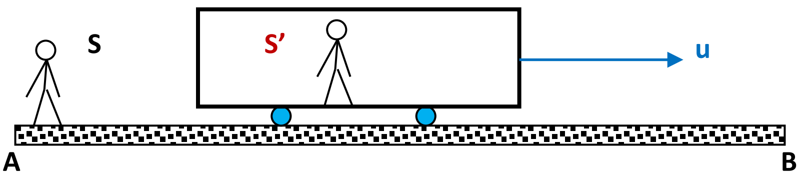
$$t'_2 = \gamma(t_2 - ux/c^2)$$
$$t'_1 = \gamma(t_1 - ux/c^2)$$
$$(t'_2 - t'_1) = \gamma\,(t_2 - t_1) = \gamma\tau \qquad \Delta t' > \tau: \text{ dilatazione del tempo}$$

Non rimane che applicare questi risultati a degli esempi che siano significativi.

Esempio 1

Immaginiamo di essere in una stazione ferroviaria, e di voler misurare la lunghezza della banchina lungo la quale scorre un treno "*a velocità relativistiche*".

S è il riferimento fisso con la banchina, S' è il riferimento fisso con il treno, pensati ambedue come riferimenti inerziali.



S è "in quiete" rispetto alla piattaforma AB, per cui misura la "lunghezza propria" L della banchina.

Determinati gli istanti t_1 e t_2 in cui il treno – visto da S - passa per A e per B, si può anche scrivere:

$$L = u*(t_2 - t_1)$$

S' è in moto rispetto ad S, e si trova di fronte a due eventi:

E_1: l'origine di S' passa per il punto A della piattaforma

(p.es. l'origine di S' ≡ la parete anteriore del compartimento di questo treno)

E_2: l'origine di S' passa per il punto B della piattaforma

Poiché gli eventi E_1 ed E_2 fanno riferimento allo stesso punto di S', il tempo che verrà misurato da S'sarà il "tempo proprio" τ.

Per S' la lunghezza della piattaforma sarà allora: $L' = u*(t'_2 - t'_1) = u*\tau = u*(t_2 - t_1)/\gamma = L/\gamma$.

In S' viene quindi osservata una lunghezza contratta $L' < L$, come era da aspettarsi.

Esempio 2

L'arrivo di raggi cosmici primari crea dei mesoni μ nell'atmosfera superiore.

[<u>Mesone μ</u> o <u>muone</u> è stato scoperto nel 1937.

È una sorta di elettrone pesante: ha massa = 207 masse dell'elettrone, e può avere carica + o – , uguale (in valore assoluto) a quella dell'elettrone].

Il tempo di vita di un mesone μ in quiete è di 2 μsec.

La velocità media di un mesone μ osservata dalla Terra è: 0,998 c.

Quale frazione dei mesoni μ che si formano ad una quota di 20 Km arriva a livello del mare?

L'intervallo di decadimento: $\tau = 2*10^{-6}$ sec rappresenta il <u>tempo proprio</u> rispetto ad un riferimento fisso con il mesone μ.

Rispetto alla Terra, il tempo viene dilatato.

La velocità media del mesone μ - vista dalla Terra – è: 0,998 c .

Questo dà: $\gamma = 15,82$.

L'intervallo di decadimento rispetto alla Terra è quindi: $\tau = (15,82)*(2*10^{-6}) = 3,164*10^{-5}$ sec.

Il tempo impiegato dal mesone μ per raggiungere la Terra da una altezza di 20 Km è: $(20*10^3\text{m})/(0,998\ c)=6,68*10^{-5}$ sec.

La frazione di mesoni μ che raggiunge la Terra è quindi: $N/N_0 = e^{-t/\tau} = 0,12$.

Il τ che uso adesso è il <u>tempo di decadimento rispetto alla Terra</u>, <u>non</u> il PROPER TIME di prima

Il ragionamento classico avrebbe previsto invece che sulla Terra arrivassero $3,12*10^{-15}$ mesoni μ.

Questo processo rappresenta il primo supporto sperimentale della Teoria della Relatività.

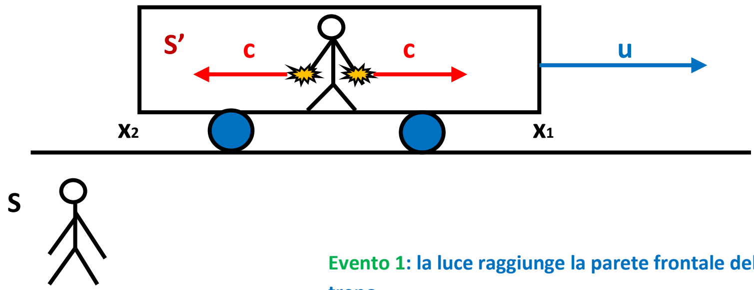
Esempio 3

In precedenza abbiamo visto il problema del treno e del viaggiatore S' che lanciava due palle verso le pareti anteriori e posteriori del vagone.

Abbiamo visto che, essendo S' esattamente in mezzo e le velocità delle due palle uguali rispetto al treno, le due palle raggiungevano le pareti davanti ed addietro simultaneamente.

Viste da S, le due palle non avevano la stessa velocità (Trasformazione Galileiana), ma anche le pareti non erano ferme, al punto che ancora l'impatto delle due palle con le rispettive pareti avveniva in modo simultaneo.

Cosa accade se sostituiamo le due palle con due lampi di luce e la velocità del treno è relativistica?



Evento 1: la luce raggiunge la parete frontale del treno

Evento 2: la luce raggiunge la parete posteriore del treno

Nel riferimento S' :

Evento 1:	$x'_1 = + L'/2$	$t'_1 = L'/2c$
Evento 2:	$x'_2 = - L'/2$	$t'_2 = L'/2c$

Nel riferimento S : **dobbiamo applicare le Trasformazioni Inverse di Lorentz.**

(Si assume che le origini O ed O' siano coincidenti al momento di emissione della luce.)

Evento 1:

$x_1 = \gamma\,(L'/2 + u*L'/2c) = (\gamma L'/2)*(1+u/c)$

$t_1 = \gamma\,(L'/2c + uL'/2c^2) = (\gamma L'/2c)*(1+u/c)$

Evento 2:

$x_2 = \gamma\,(- L'/2 + u*L'/2c) = (\gamma L'/2)*(- 1+u/c)$

$t_2 = \gamma\,(L'/2c - uL'/2c^2) = (\gamma L'/2c)*(1-u/c)$

Cioè: **GLI EVENTI NON SONO PIU' SIMULTANEI: $t_2 < t_1$.**

La differenza di tempo è data da: $\Delta t = t_1 - t_2 = \gamma L'u/c^2$.

Solo a questo punto è possibile iniziare parlare di velocità nella Relatività Ristretta, argomento che all'inizio era stato lasciato in sospeso.

Un osservatore S, che osserva un <u>oggetto in movimento</u>, registra i seguenti dati:

OGGETTO:	**istante iniziale:**	$((ct_1),x_1,y_1,z_1)$
	istante successivo:	$((ct_2),x_2,y_2,z_2)$

Facendo la differenza si ottiene il 4-vector: $((c\Delta t), \Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

"Dividendo per Δt" si possono scrivere le componenti della velocità "*come vista da S*":

$$((c), v_x, v_y, v_z)\ ,$$

dove si sono indicati, con v_x, v_y, v_z, i tre rapporti:

$$v_x = \Delta x/\Delta t\ ;\ v_y = \Delta y/\Delta t\ ;\ v_z = \Delta z/\Delta t\ ,$$

avendo anche avuto cura – se necessario - di calcolare anche i limiti cui tendono questi rapporti per $\Delta t \to 0$.

Ma, questa sequenza ordinata di 4 valori può essere considerata un vettore in 4 dimensioni?

CERTAMENTE NO!

Le componenti del vettore sono state divise per una quantità che a sua volta è variabile da un osservatore ad un altro.

Quindi, i 4 valori scritti possono anche avere un significato per S, ma solo per S.

Cioè: non rappresentano un 4-vector.

È possibile costruire un vettore-velocità che si trasformi secondo le Trasformazioni di Lorentz?

CERTAMENTE SI!

Basta dividere i termini di $((c\Delta t), \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ non per Δt ma per $\Delta\tau$, il tempo proprio fra i due fenomeni.

Infatti, essendo $\Delta\tau$ una costante per tutti gli osservatori, partendo da un 4-vector si ottiene ancora un 4-vector:

$$((c\Delta t/\Delta\tau), \Delta x/\Delta\tau, \Delta y/\Delta\tau, \Delta z/\Delta\tau),$$

che – per sua natura - si trasforma – appunto - secondo le Trasformazioni di Lorentz.

Ma in S "io misuro" Δt, per cui le componenti del vettore appena dato possono essere scritte come segue:

$$\left(\left(c\frac{\Delta t}{\Delta\tau}\right), \frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta\tau}, \frac{\Delta y}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta\tau}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta\tau}\right) = \left(\left(c\frac{\Delta t}{\Delta\tau}\right), v_x\frac{\Delta t}{\Delta\tau}, v_y\frac{\Delta t}{\Delta\tau}, v_z\frac{\Delta t}{\Delta\tau}\right).$$

Però: $$\Delta\tau = \sqrt{\Delta t^2 - \frac{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}{c^2}} = \Delta t\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}{c^2}},$$

il che significa che:

$$\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{c^2}}} = \gamma_v \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma_v}$$

Oltre al γ, che tiene conto del movimento relativo dei due sistemi di riferimento S ed S', adesso abbiamo il γ_v, che interviene quando in S guardo un oggetto in movimento rispetto a me.

Il risultato finale è, quindi: $$\left((c\gamma_v), v_x\gamma_v, v_y\gamma_v, v_z\gamma_v\right).$$

Queste sono quindi le componenti di un altro 4-vector, il **4-vector "Velocità"** nello Spazio di Minkowski.

Nella trasformazione in S', sarà necessario tener conto che la velocità misurata in S' è v' (*ogni osservatore divide lo spazio che vede per il tempo che "lui" misura, per dare la velocità*) e non v, per cui si dovrà tener conto anche di:

$$\gamma_{v'} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{x'}^2+v_{y'}^2+v_{z'}^2}{c^2}}}.$$

Altro elemento "nuovo" appena introdotto: γ_v

Le trasformazioni per le componenti del 4-vector "velocità" saranno quindi:

$$\begin{cases} \gamma_{v'} v'_x = \gamma\gamma_v v_x - \beta\gamma\gamma_v c \\ \gamma_{v'} v'_y = \gamma_v v_y \\ \gamma_{v'} v'_z = \gamma_v v_z \\ \gamma_{v'} c = -\beta\gamma\gamma_v v_x + \gamma\gamma_v c \end{cases}$$

Il risultato è decisamente "*poco attraente*", ma è possibile migliorarlo.

Consideriamo la IV equazione: $\gamma_{v'} c = -\beta\gamma\gamma_v v_x + \gamma\gamma_v c$

$$= \gamma\gamma_v (c - \beta v_x) = \gamma\gamma_v \left(c - \frac{u}{c} v_x\right)$$

$$\boxed{\gamma_{v'} = \gamma\gamma_v \left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)}$$

Sostituiamolo nella I equazione: $\gamma_{v'} v'_x = \gamma\gamma_v v_x - \beta\gamma\gamma_v c$

$$\cancel{\gamma\gamma_v} \left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right) v'_x = \cancel{\gamma\gamma_v} v_x - u\cancel{\gamma\gamma_v}$$

$$\boxed{v'_x = \frac{v_x - u}{\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)}}$$

Leggi di trasformazione delle velocità ottenute ricorrendo al 4-vector "Velocità".

Sostituiamolo nella II equazione: $\gamma_{v'} v'_y = \gamma_v v_y$

$$\cancel{\gamma\gamma_v}\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right) v'_y = \cancel{\gamma_v} v_y$$

$$\boxed{v'_y = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)}}$$

Sostituiamolo nella III equazione: $\gamma_{v'} v'_z = \gamma_v v_z$

$$\cancel{\gamma\gamma_v}\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right) v'_z = \cancel{\gamma_v} v_z$$

$$\boxed{v'_z = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)}}$$

Abbiamo elevato al quadrato!!!!

Riprendiamo in esame la IV equazione: $\gamma_{v'} = \gamma\gamma_v \left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)$

Abbiamo anche "capovolto" le frazioni!!!!

Scriviamola "aprendo" tutte le γ : $\frac{1}{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(1 - \frac{u v_x}{c^2}\right)^2$

$$\left(\frac{c^2 - v'^2}{c^2}\right) = \frac{\left(\frac{c^2 - u^2}{c^2}\right)\left(\frac{c^2 - v^2}{c^2}\right)}{\left(\frac{c^2 - u v_x}{c^2}\right)^2} = \frac{(c^2 - u^2)(c^2 - v^2)}{(c^2 - u v_x)^2}$$

Commento:

u < c: il moto relativo fra i due sistemi di riferimento non può superare la velocità della luce, altrimenti il γ diventa immaginario.

Questo significa che, se per un osservatore S è: $v < c$ (oppure: $v > c$)

per qualsiasi altro osservatore S' è: $v' < c$ (oppure: $v' > c$).

ma anche che, se $v = c$ (la quantità a destra = 0), anche $v' = c$ Ambo i membri dell'equazione si annullano.

Calcoliamo ora la <<lunghezza del 4-vector "velocità" >>: $\left((c\gamma_v), v_x\gamma_v, v_y\gamma_v, v_z\gamma_v\right)$.

Si ottiene:

$$(c\gamma_v)^2 - (v_x\gamma_v)^2 - (v_y\gamma_v)^2 - (v_z\gamma_v)^2 = {\gamma_v}^2\left(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2\right) = \frac{c^2 - v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = c^2$$

Altro esempio di 4-scalar!

Ultimo argomento che vorrei presentare è l'equivalente – in Relatività – di una costante del moto che – in Meccanica Classica - è stata chiamata "Quantità di Moto", senza dimenticare che accanto ad essa abbiamo un'altra costante del moto: l'"Energia". È un tema alquanto impegnativo, che però "*vale la pena*" di sviluppare, se non altro per il risultato importante che troveremo.

Ricordiamo che, classicamente, la quantità di moto è definita da: $\vec{p} = m\vec{v}$.

In Relatività "m" deve essere sostituito da un qualche cosa di costante nello Spazio di Minkowski.

Cosa c'è di meglio che sostituire "m" con "m_0", la massa di quiete o rest mass o proper mass, di un corpo, cioè la "resistenza all'accelerazione" di un corpo quando questo è fermo rispetto a me?

Con questa scelta, scriviamo: $\underline{p} = m_0\underline{v} = m_0\gamma_v\left(c, v_x, v_y, v_z\right)$.

NB: La riga sotto la "p" sta ad indicare un "4-vector", e corrisponde alla freccia fatta sopra la "p" per indicare un 3-vector.

Le tre componenti $m_0\gamma_v v_x, m_0\gamma_v v_y, m_0\gamma_v v_z$ altro non sono che le componenti che corrispondono alla Quantità di Moto "classica", ed alle quali tendono quando le velocità in gioco sono trascurabili rispetto alla velocità della luce.

Infatti si usa scrivere: $p_x = m_0\gamma_v v_x$; $p_y = m_0\gamma_v v_y$; $p_z = m_0\gamma_v v_z$

Rimane da approfondire il significato della componente in più, non ancora considerata:

$$m_0\gamma_v c\ .$$

Cioè:

$$p_0 = m_0\gamma_v c = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Per dare un significato a questa scrittura dobbiamo ricordare che, nel calcolo numerico, si prevedono anche "calcoli approssimati", capaci di dare dei risultati "non proprio esatti", ma sufficientemente prossimi agli esatti per permetterci di trarre delle conclusioni attendibili.

Uno di questi prevede che si possa scrivere: $(a + b)^n \cong a^n + na^{(n-1)}b + \dots$
qualunque sia "n".

È inoltre comunemente accettato che si possa scrivere:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cong 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ \dots.$$

Questo significa che la componente p_0 potrà essere scritta nella forma:

$$p_0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cong m_0 c + \frac{1}{2}\frac{m_0 v^2}{c} + \ \dots$$

o anche:

$$cp_0 = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \cdots$$

Però, dalla Meccanica Classica "*sappiamo che*": $\frac{1}{2} m_0 v^2$ è l'Energia Cinetica (classica) della particella che si sta muovendo.

Questa osservazione "*ha suggerito ad Einstein*" che il termine in esame è legato alla energia globale della particella, della quale l'Energia Cinetica è solo una parte.

Il che ha fatto scrivere: $cp_0 = E$ (energia della particella), o anche: $p_0 = E/c$.

IL FATTO NUOVO che qui si presenta è che, quando la particella è ferma, la sua energia, anziché nulla, diventa: $E = m_0c^2$.
Tutti gli altri termini della serie accennata, infatti, svaniscono.
È forse la formula più conosciuta in tutto il mondo, senza distinzioni di cultura o di preparazione.

Cioè: massa ed energia sono intercambiabili fra loro: la massa si può quindi trasformare in energia e viceversa.

Chi può decidere se questa previsione è accettabile o no?
Solo l'esperimento!

Purtroppo le bombe atomiche che hanno messo fine alla 2° Guerra Mondiale rappresentano la più evidente conferma che questa previsione è stata confermata.

Per concludere questa lunga chiacchierata non posso non ri-andare all'affermazione che – ai bei tempi degli studi universitari - ho sentito ripetere di frequente:

<<Per capire la Relatività è necessario cambiare totalmente mentalità/modo di vedere le cose>>

e confermare che – dopo quanto è stato detto - appare essere ampiamente giustificata.

Per continuare sarebbe necessario entrare in maggiori dettagli tecnico-matematici, cosa che in questa sede non appare essere molto opportuna.

È così che, mentre la Teoria della Relatività Ristretta appena comincia il proprio cammino, noi concludiamo il nostro, con la speranza di aver stimolato delle curiosità ed aver suggerito dei temi su cui merita "*sprecare*" un po' di tempo "*per pensarci su*".

Comunque sia, è stata aperta la porta su un mondo che – per chi gode di certe sensibilità – può apparire addirittura affascinante ….