Esempi di calcolo riguardanti le velocità

Calcolo delle componenti della velocità " v " di una particella ★ :

Riferimento S:

Evento 1: particella in (x_1, y_1, z_1) all'istante t_1 .

Evento 2: particella in (x_2, y_2, z_2) all'istante t_2 .

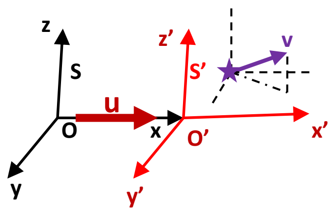
Le componenti della velocità istantanea di ★ saranno date da:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad ; \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad ; \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

Riferimento S' (in moto rispetto ad S con velocità "u" in direzione "x"):

Evento 1: particella in (x'_1, y'_1, z'_1) all'istante t'_1 .

Evento 2: particella in (x'_2, y'_2, z'_2) all'istante t'_2 .



Le componenti della velocità istantanea saranno date da:

$$\lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'} \quad ; \quad \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta y'}{\Delta t'} \quad ; \quad \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta z'}{\Delta t'}$$

Scrittura differenziale:

$$\begin{array}{ccc} x'_2 = \gamma\,(x_2 - ut_2) & y'_2 = y_2 & z'_2 = z_2 \\ x'_1 = \gamma\,(x_1 - ut_1) & y'_1 = y_1 & z'_1 = z_1 \\ \hline \Delta x' = \gamma(\Delta x - u\,\Delta t) & \Delta y' = \Delta y & \Delta z' = \Delta z \end{array}$$

$$\begin{array}{c} t'_2 = \gamma\,(t_2 - ux_2/c^2) \\ t'_1 = \gamma\,(t_1 - ux_1/c^2) \\ \hline \Delta t' = \gamma(\Delta t - u\,\Delta x/c^2) \end{array}$$

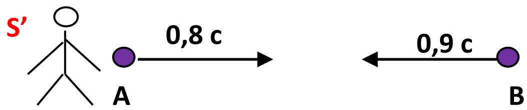
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}}$$

Componenti velocità

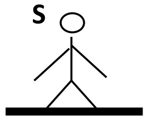
L'operazione consiste nel fare le differenze e passare al limite per Δt e $\Delta t' \to 0$.

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{\Delta x'}{\Delta t'} = \dfrac{\Delta x - u\,\Delta t}{\Delta t - \frac{u\Delta x}{c^2}} = \dfrac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}} \\[2ex] v'_y = \dfrac{\Delta y'}{\Delta t'} = \dfrac{\Delta y}{\gamma\left(\Delta t - \frac{u\Delta x}{c^2}\right)} = \dfrac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} \\[2ex] v'_z = \dfrac{\Delta z'}{\Delta t'} = \dfrac{\Delta z}{\gamma\left(\Delta t - \frac{u\Delta x}{c^2}\right)} = \dfrac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)} \end{cases}$$

Esempio 1



"Interpreto" S come riferimento iniziale ed S'≡ A come riferimento secondario;
B invece lo "leggo" come la particella, della quale devo determinare la velocità nei vari riferimenti.



S "vede" A e B che si muovono come indicato in figura.
Quale è il moto relativo di B rispetto ad S', solidale con A?

Rispetto ad S, io posso interpretare S’ come un riferimento che si muove con velocità u = 0,8c in direzione dell’asse “+x”.
Adesso si tratta di trasformare, in S’, la velocità della particella B, pari a (- 0,9c) vista da S.

$u = 0{,}8c \qquad v_x = -0{,}9c \qquad v_y = v_z = 0$

$$v'_{x'} = \frac{-(0,9c + 0,8c)}{1 + \frac{0,9c*0,8c}{c^2}} = -\frac{1,7}{1,72}c = -0,988c$$

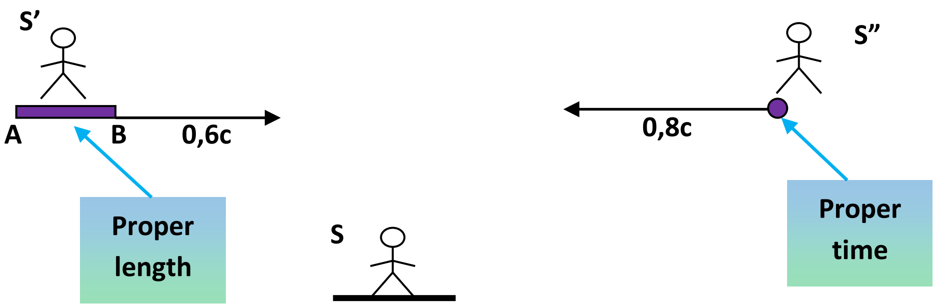
$$v'_{y'} = 0 \quad ; \quad v'_{z'} = 0$$

La velocità relativa $v'_{x'}$ rimane comunque inferiore a “c”!!!

Esempio 2

Una sbarra, la cui proper length = 1 m, si muove – vista dal riferimento S - con una velocità pari a 0,6c in direzione “+x”.
Nello stesso riferimento, una particella si muove in direzione “-x” con una velocità pari a 0,8c.
Trovare il tempo impiegato dalla particella per attraversare la sbarra

(a) Nel sistema S’
(b) Nel sistema S” della particella
(c) Nel sistema S



Domande a cui bisogna rispondere prima di tutto:

- Quale è il riferimento rispetto al quale l’intervallo di tempo è un proper interval?
- Quale è il riferimento rispetto al quale la lunghezza misurata è una proper length?

S” è il riferimento dove gli eventi avvengono sempre nello stesso punto: la particella, per cui è in esso che si misura il proper time.
S’ è il riferimento rispetto al quale la sbarra è in quiete, per cui è in esso che si misura la proper length.

Definizione degli eventi che caratterizzano il problema:

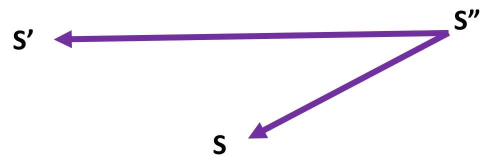
Evento 1: la particella S” passa per B
Evento 2: la particella S” passa per A

Determinazione del tempo:

essendo S” il riferimento che dà il proper time, noi siamo in grado di definire il tempo andando da S” ad S’ o da S” ad S usando la formula della dilatazione del tempo.

NON POSSIAMO – INVECE - ANDARE DIRETTAMENTE DA S AD S’.

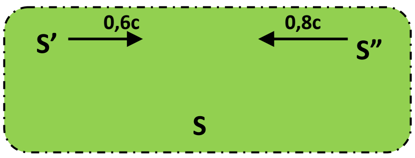
La situazione è quindi la seguente:



Flusso del tempo

Cominciamo con l’operare in S’.
In questo riferimento si ha la proper length, per cui la lunghezza della sbarra è 1 m.
La velocità invece è incognita, per cui va calcolata.

v = 0,6c ; u_x = -0,8c $\Rightarrow$ $u'_x = \frac{-1{,}4c}{1+0{,}48} = -\frac{1{,}4c}{1{,}48}$; $L' = 1\ \mathrm{m}$



$$\Delta t' = \frac{L'}{u'_x} = \frac{1}{\frac{1{,}4c}{1{,}48}} = \frac{1{,}48}{1{,}4c} = 3,52 * 10^{-9}\mathrm{sec}$$

Per trovare l’intervallo di tempo negli altri riferimenti , noi dobbiamo prima calcolarci i valori di γ.

$$\gamma_{SS'} = \frac{1}{\sqrt{1-(0,6)^2}} = 1,25$$

$$\gamma_{SS''} = \frac{1}{\sqrt{1-(0,8)^2}} = \frac{5}{3}$$

$$\gamma_{S'S''} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1,4}{1,48}\right)^2}} = \frac{1,48}{0,48} \cong 3,08$$

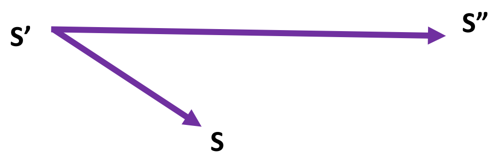
Quindi:

$$\Delta t'' = \frac{\Delta t'}{\gamma_{S'S''}} = \frac{1{,}48}{1{,}4c} * \frac{0{,}48}{1{,}48} = 1,14 * 10^{-9}\ \mathrm{s}$$ sono arrivato al proper time!!

$$\Delta t = \gamma_{SS''} * \Delta t'' = \frac{5}{3} * \frac{048}{1{,}4c} = 1,90 * 10^{-9}\ \mathrm{s}$$

Utilizziamo adesso la contrazione delle lunghezze

Data la proper length in S’, possiamo trovare la lunghezza sia in S che in S”:



Flusso delle lunghezze

Tali lunghezze sono:

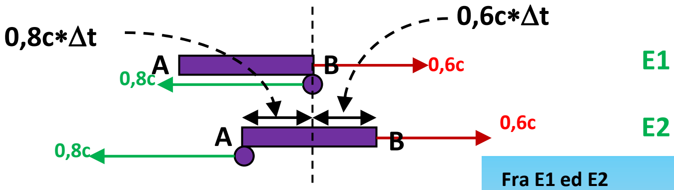
$$\mathbf{L" = \frac{L'}{\gamma_{S'S"}} = \frac{1}{1{,}48}*0{,}48\ m} \quad \textbf{(= 0,324 m)}$$

$$\mathbf{L = \frac{L'}{\gamma_{SS'}} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8\ m}$$

Intervallo di tempo in S"

$$\mathbf{\Delta t" = \frac{L"}{v_{S'S"}} = \frac{1}{1{,}48}*0{,}48*\frac{1{,}48}{1{,}4c} = 1{,}14*10^{-9}\ s}$$

Intervallo di tempo in S



$$\mathbf{0{,}6c*\Delta t + 0{,}8c*\Delta t = L = 0{,}8}$$

$$\mathbf{\Delta t = \frac{0{,}8}{1{,}4c} = 1{,}90*10^{-9}\ s}$$

Fra E1 ed E2
la sbarra è avanzata verso destra di 0,6c*Δt
e
la pallina ha percorso 0,8c*Δt verso sinistra.
La lunghezza della sbarra è la somma di ambedue questi percorsi.