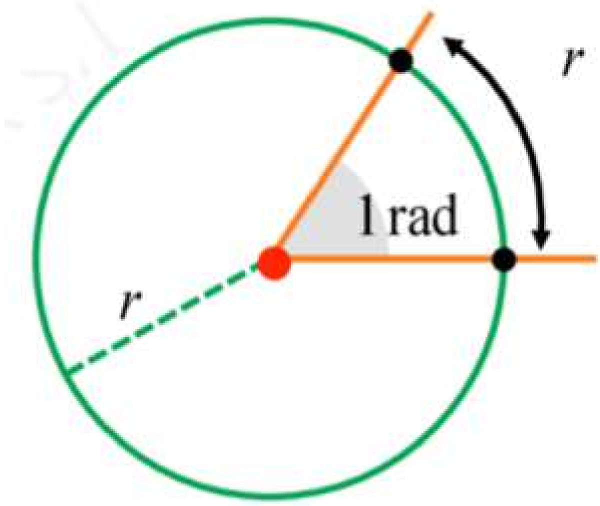
Trigonometria: alcune brevi note

a cura di Bruno Pizzamei

Misura degli angoli

Grado sessagesimale: Il **grado sessagesimale** è un'unità di misura degli angoli.
Un angolo giro è diviso in 360 gradi sessagesimali, un angolo retto in 90 gradi sessagesimali.
Ogni grado è ulteriormente suddiviso in 60 minuti primi (') e ogni minuto primo in 60 secondi primi (")

Radiante: Nel Sistema Internazionale di unità di misura (SI), l'angolo si misura in radianti.
Un **radiante** è l'angolo che si ha in corrispondenza di un arco di lunghezza pari al raggio della circonferenza.
All'angolo giro, che in gradi misura 360°, sottende un arco pari alla circonferenza intera.
Il valore dell'angolo giro in radianti è dato dal numero di volte che il raggio è contenuto nella circonferenza.



Angolo giro (360°) in radianti = $\frac{2\pi r}{r}$ = 2 π

Angolo piatto (180°) in radianti = π

1 rad ≈ 57°17'44''……

In generale quindi

$\alpha° : \alpha^{rad} = 180° : \pi$

$\alpha^{rad} = \alpha° \frac{\pi}{180}$

$\alpha° = \alpha^{rad} \frac{180}{\pi}$

gradi	Rad.	gradi	Rad.
0°	0	180°	π
30°	π/6	210°	7π/6
45°	π/4	225°	5π/4
60°	π/3	240°	4π/3
90°	π/2	270°	3π/4
120°	2π/3	300°	5π/3
135°	3π/4	315°	7π/4
150°	5π/6	330°	11π/6

Introduzione

La trigonometria è una parte della matematica che tratta delle relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo.

*In matematica, dati due insiemi **A** e **B** diciamo che esiste una **relazione R** fra A e B se esiste una proprietà che associ a qualche elemento di A un elemento di B. La relazione sarà l'insieme di tutte le coppie (a,b) per cui R è valida*

*Una **funzione** è una relazione per la quale ogni elemento del primo insieme (detto **dominio**) corrisponde uno e un solo elemento del secondo insieme (detto **codominio**).*

*Formalmente, una funzione (**f**) da un insieme (A) a un insieme (B) è una regola che associa a ogni elemento (**x**) di (A) un unico elemento (**y**) di (B), indicato come (**f(x)**).*

Le **funzioni trigonometriche** o **funzioni goniometriche** o **funzioni circolari** sono funzioni di un angolo. Esse sono importanti nello studio dei triangoli. Consentono di trattare i fenomeni periodici, oltre a un gran numero di altre applicazioni.

Lo studio delle funzioni trigonometriche risale ai tempi dei babilonesi, e una quantità considerevole del lavoro fondamentale fu svolto dai matematici greci, indiani e persiani

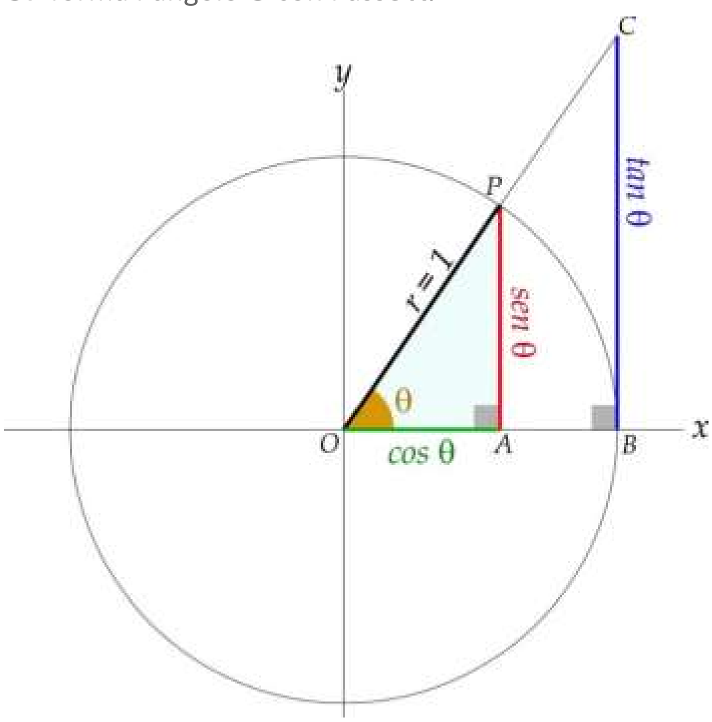
Le funzioni goniometriche nel cerchio unitario

La circonferenza goniometrica, o circonferenza trigonometrica, è una circonferenza di raggio pari a 1 situata nel piano cartesiano e con centro nell'origine degli assi. La circonferenza goniometrica è il punto di partenza per la definizione delle funzioni goniometriche.

Le funzioni goniometriche possono essere definite come lunghezze di diversi segmenti costruiti nel cerchio unitario, circonferenza di raggio unitario **(r = 1)** e centro nell'origine degli assi **O (0.0)**. Un punto **P** si trova su questa circonferenza e il raggio **OP** forma l'angolo **Θ** con l'asse **X.**

Il triangolo **OAP** è retto in **A**, quindi è rettangolo. Il cateto **OA**, ascissa del punto **P** si definisce ***coseno*** dell'angolo **Θ**, il cateto **AP**, ordinata di **P** si definisce ***seno*** di Θ.

Consideriamo il triangolo **OBC**, anch'esso rettangolo e simile al triangolo **OAP**. Il cateto **OB** è pari al raggio, Il cateto **BC** è tangente alla circonferenza nel punto **B**. Per questo motivo la sua lunghezza si definisce **tangente** dell'angolo **Θ**.



Le funzioni **seno** e **coseno** assumono valori compresi tra −1 e +1 mentre la ***tangente*** assume valori compresi tra **−∞** e **+∞**.

Il segno dipende dall'ampiezza di **ϴ** che determina la posizione del punto **P** nei vari quadranti.

Una relazione importante risulta, applicando il teorema di Pitagora: **sen² ϴ + cos² ϴ = 1**

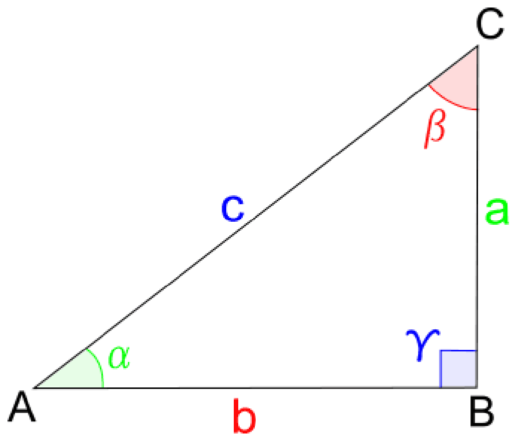
Le funzioni goniometriche nel triangolo rettangolo

Le funzioni trigonometriche possono essere definite anche come rapporti fra le misure dei lati di un triangolo rettangolo contenente l'angolo di cui si vuole determinate il valore della funzione.

sen **α** = $\frac{a}{c}$ seno di **α** = $\frac{\textit{cateto opposto ad } \alpha}{\textit{ipotenusa}}$

cos **α** = $\frac{b}{c}$ coseno di **α** = $\frac{\textit{cateto adiacente ad } \alpha}{\textit{ipotenusa}}$

tan **α** = $\frac{a}{b}$ tangente di **α** = $\frac{\textit{cateto opposto ad } \alpha}{\textit{cateto adiacente ad } \alpha}$



Alcune relazioni

Esistono molte relazioni che legano le funzioni trigonometriche tra loro e all'interno dei triangoli e che permettono la risoluzione di problemi collegati appunto ai triangoli. Merita precisare che la trigonometria è in grado di risolvere triangoli qualsiasi e non solamente rettangoli. Le relazioni sono reperibili su qualsiasi testo di trigonometria. Noi ricaviamo due di queste relazioni.

1) $\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$ ma $\frac{a}{b}$ = tan α per cui deriva che $\frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$ = **tan α**

2) **sen²α + cos²α** = $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2}$ ma **a² + b² = c²** (teorema di Pitagora) quindi

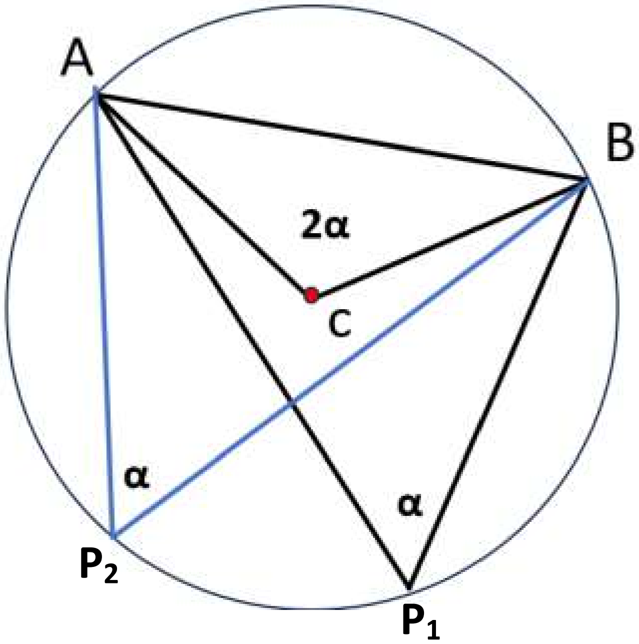
$\frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$ per cui **sen²α + cos²α = 1**

Da questa relazione si ricava ad esempio **sen α =**$\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$

e tante altre.

Tra le molte relazioni utilizzabili in trigonometria che consentono la risoluzione di triangoli anche non rettangoli ne citiamo due.

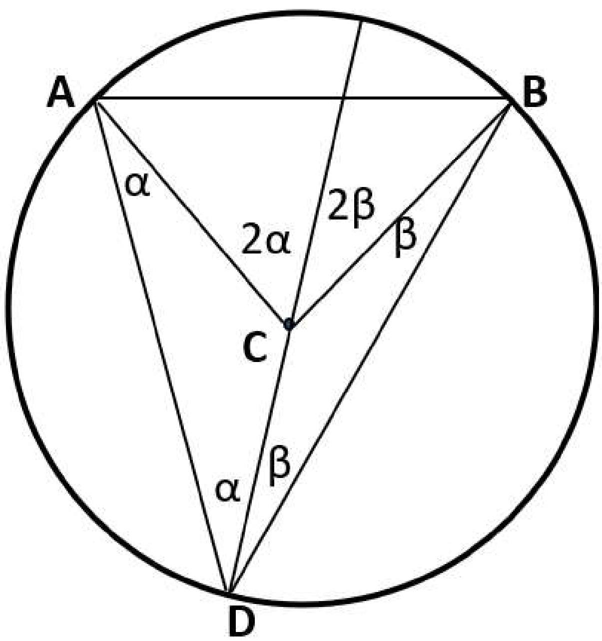
Alcune premesse.



L'**angolo al centro** è formato da due raggi che partono dal centro di un cerchio e si estendono fino agli estremi dell'arco AB sulla circonferenza. Questo angolo è indicato con 2α.

L'**angolo alla circonferenza** è formato da due corde che congiungono un punto **P** della circonferenza.

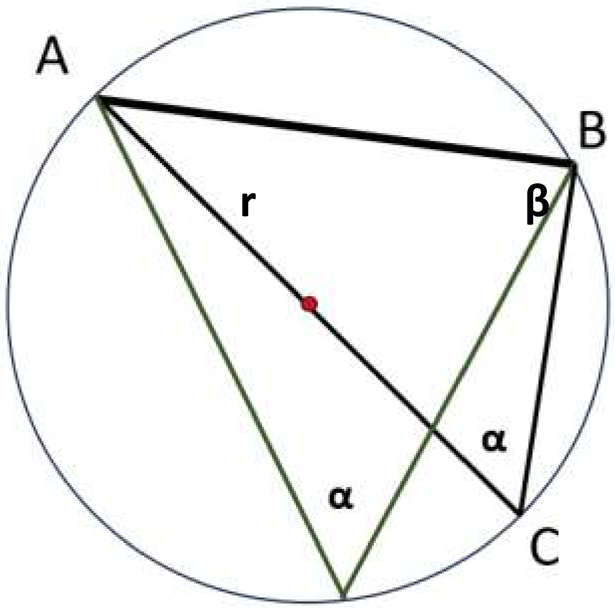
Con gli estremi **A** e **B** dell'arco.



L'angolo alla circonferenza α è la metà dell'angolo al centro 2α che sottende lo stesso arco.

La figura giustifica questa affermazione, notando che i triangoli ACD e BCD sono isosceli.

Dato che questa affermazione è valida per qualsiasi angolo alla circonferenza posso dire che **tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono uguali**



Considero ora tra gli angoli alla circonferenza che insistono sull'arco AB quello in cui uno dei lati passa per il centro del cerchio. Il triangolo A B C è un triangolo rettangolo (l'angolo al centro vale 180° quindi l'angolo alla circonferenza β vale 90°) posso quindi applicare la definizione di seno.

senα = AB/2r

AB = 2r senα

per cui ancora **AB/senα = 2r**

La lunghezza di una corda AB di una circonferenza di raggio r è data dal doppio prodotto del raggio per il seno di uno degli angoli alla circonferenza che insistono sulla corda. In formule: AB = 2r senα = 2r sinβ.

1) Teorema dei seni

Applico il teorema della corda a ogni lato di un triangolo qualsiasi per cui

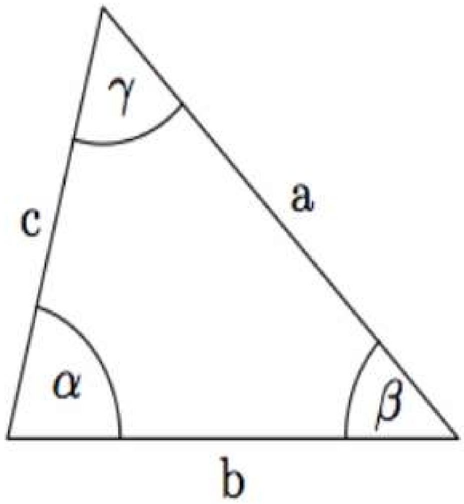
$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}} = 2r$$

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\beta}} = 2r$$

$$\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\gamma}} = 2\mathrm{r}$$

In un triangolo qualsiasi il rapporto tra la misura di un lato e il seno dell'angolo opposto a esso è costante.

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\beta}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{sen}\,\boldsymbol{\gamma}}$$



2) Teorema del coseno

In un triangolo qualsiasi il quadrato della misura di un lato è dato dalla somma dei quadrati delle misure degli altri due lati, meno il loro doppio prodotto moltiplicato per il coseno dell'angolo tra essi compreso

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha}$$

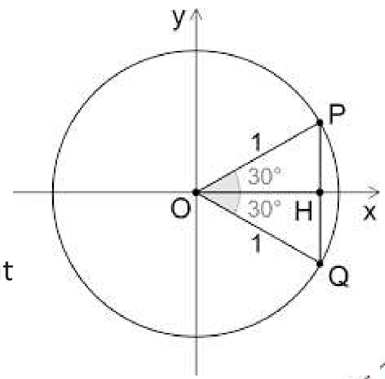
Il teorema del coseno può essere visto come il teorema di Pitagora generalizzato perché se ci troviamo in un triangolo rettangolo $\alpha = 90°$. Sappiamo. che **cos 90 = 0** per cui l relazione diventa

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

che è proprio l'espressione del teorema di Pitagora. Tralasciamo le dimostrazioni così pure, come già si diceva, tutte le varie altre relazioni relative al rapporto tra le funzioni goniometriche e gli elementi del triangolo.

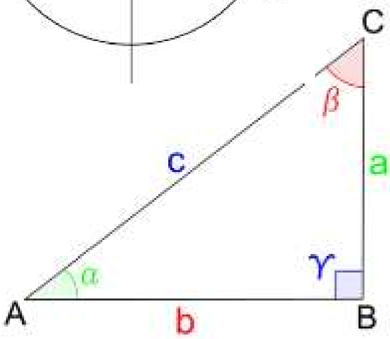
I valori di **seno** e **coseno** e **tangente** di un angolo sono molto importanti nella trigonometria, e nella geometria, perchè permettono di calcolare facilmente gli elementi di un qualsiasi triangolo anche non rettangolo.

Es: Calcolo il valore del seno di 30°. In questo caso il triangolo rettangolo **OHP** è la metà di un triangolo equilatero, sen 30° = PH, PH/OP =1/2 quindi a sen 30°= $\frac{1}{2}$ = 0,5



Calcolo degli elementi di un triangolo

In un triangolo rettangolo conosco **α = 30°** e **b = 10** cm voglio trovare tut triangolo. Misura degli angoli: **α = 30°, β = 60° Υ = 90°**.



Se applico le definizioni viste sopra:

$\cos \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$ $\quad c = \frac{b}{\cos\alpha}$ $\quad c = \frac{10}{\cos 30}$ $\quad c = \frac{10}{0{,}86602}$ $\quad$ c =11,54 cm

$\mathrm{tg}\, \boldsymbol{\alpha} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ $\quad$ a = b tan α a = 10 tan 30° a = 10• 0,577735.. a = 5,77350……

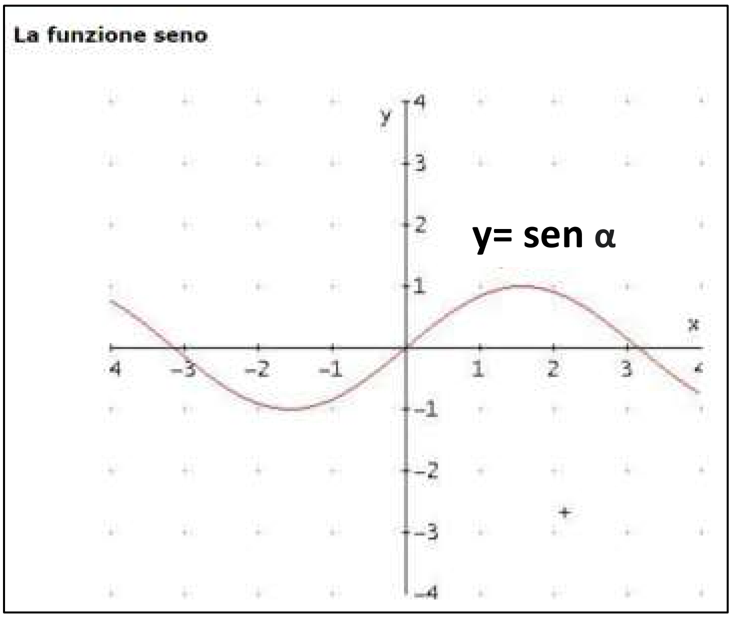
quindi **a = 5,77 cm** **b = 10 cm** **c = 11,54 cm** Ho trovato così tutti gli elementi del triangolo.

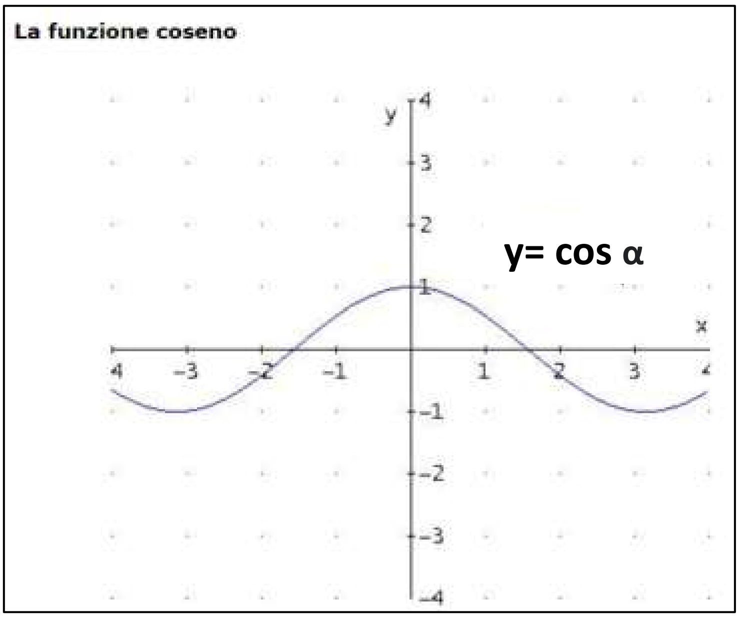
Con procedimenti analoghi posso sempre risolvere qualsiasi triangolo.

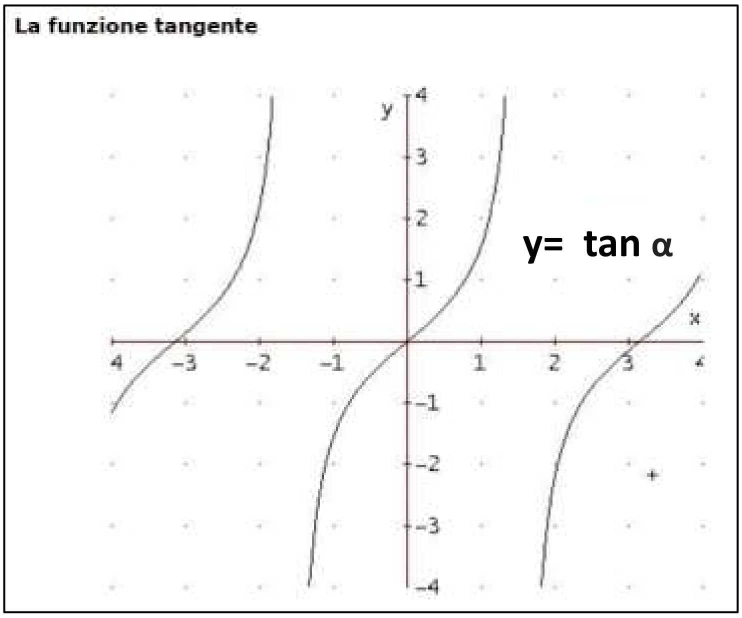
I valori delle funzioni seno, coseno, tangenti una volta si trovavano in tavole apposite, oggi possono essere calcolate agevolmente con una calcolatrice scientifica o con uno smartphone, un tablet o un pc e utilizzando l'apposita app installata. Devo prestare attenzione all'unità di misura, gradi o radianti, utilizzate.

Angolo		Seno		Coseno		Tangente	
Gradi	Radianti	Espressione con radicali	valore	Espressione con radicali	valore	Espressione con radicali	valore
0°	0	0	0	1	1	0	0
10°	$\frac{\pi}{18}$		0,1736		0,9848		0,1763
12°	$\frac{\pi}{15}$		0,2079		0,9781		0,2126
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	0,2588	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	0,9659	$2-\sqrt{3}$	0,2679
18°	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	0,3090	$\frac{1}{4}(\sqrt{10+2\sqrt{5}})$	0,9511	$\frac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	0,3249
20°	$\frac{\pi}{9}$		0,3420		0,9397		0,3640
22°30'	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{1}{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}})$	0,3827	$\frac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$	0,9239	$\sqrt{2}-1$	0,4142
25°	$\frac{5\pi}{36}$		0,4226		0,9063		0,4663
28° 39'	0,5		0,4794		0,8776		0,5463
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	0,5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,8660	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0,5774
36°	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	0,5878	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	0,8090	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	0,7265
40°	$\frac{2\pi}{9}$		0,6428		0,7660		0,8391
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,7071	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,7071	1	1
50°	$\frac{5\pi}{18}$		0,7660		0,6428		1,1918
54°	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)$	0,8090	$\frac{1}{4}(\sqrt{10-2\sqrt{5}})$	0,5878	$\frac{1}{5}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	1,3764
57°18'	1		0,8415		0,5403		1,5574
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,8660	$\frac{1}{2}$	0,5	$\sqrt{3}$	1,7321
67° 30'	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$	0,9239	$\frac{1}{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}})$	0,3827	$\sqrt{2}+1$	2,4142
70°	$\frac{7\pi}{18}$		0,9397		0,3420		2,7475
72°	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{10+2\sqrt{5}})$	0,9511	$\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$	0,3090	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	3,0777
75°	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	0,9659	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	0,2588	$2+\sqrt{3}$	3,7321
80°	$\frac{4\pi}{9}$		0,9848		0,1736		5,6713
85°56'24"	1,5		0,9975		0,0707		14,1014
90°	$\frac{\pi}{2}$		1		0	$+\infty$	

Le funzioni goniometriche viste sopra hanno i seguenti grafici







La trigonometria ha molte applicazioni pratiche in vari campi. Ecco alcune delle principali:

1. **Topografia**: La trigonometria è utilizzata per misurare distanze e angoli sul terreno, permettendo di creare mappe accurate e di determinare l'altezza di montagne e edifici.
2. **Astronomia**: Gli astronomi usano la trigonometria per calcolare le distanze tra stelle e pianeti, nonché per determinare le orbite dei corpi celesti.
3. **Ingegneria**: Gli ingegneri utilizzano la trigonometria per progettare strutture come ponti, edifici e strade, assicurandosi che siano stabili e sicure.
4. **Fisica**: La trigonometria è fondamentale nello studio delle onde, delle oscillazioni e dei fenomeni periodici, come le onde sonore e le onde elettromagnetiche.
5. **Elettronica**: In elettronica, la trigonometria è utilizzata per analizzare circuiti AC (corrente alternata) e per progettare sistemi di comunicazione.
6. **Grafica computerizzata**: La trigonometria è essenziale per creare immagini tridimensionali e animazioni, permettendo di calcolare prospettive, ombre e riflessi.
7. **Medicina**: In campo medico, la trigonometria è utilizzata per analizzare immagini mediche, come le scansioni CT e MRI, e per pianificare interventi chirurgici.
8. **Navigazione marittima** e **aerea**

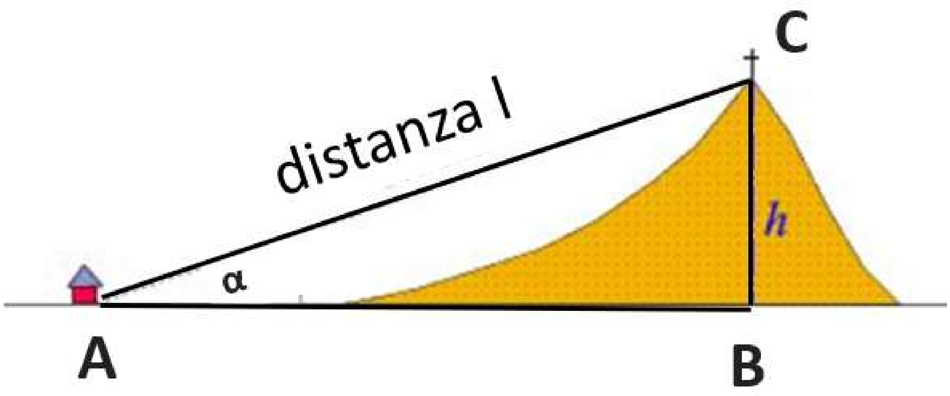
Qualche applicazione

Oltre alla risoluzione dei triangoli, le applicazioni della trigonometria spaziano in diversi campi: dalla topografia all'acustica, all'ottica, all'elettronica.

Tutti i fenomeni oscillatori possono essere adeguatamente rappresentati da curve sinusoidali.

Per esempio, tutte le onde elettromagnetiche sono dovute alla variazione di campi elettrici e magnetici perpendicolari che variano con andamento sinusoidale.

Calcolo dell'altezza h di un monte



Misuro la distanza fra il punto di osservazione **A** e la vetta del monte **C**. La vetta appare dal punto di osservazione sotto un angolo **α**.

Considero il triangolo rettangolo **ABC** in cui la distanza **l = 3,7 km** e l'angolo **α = 19° 30'**

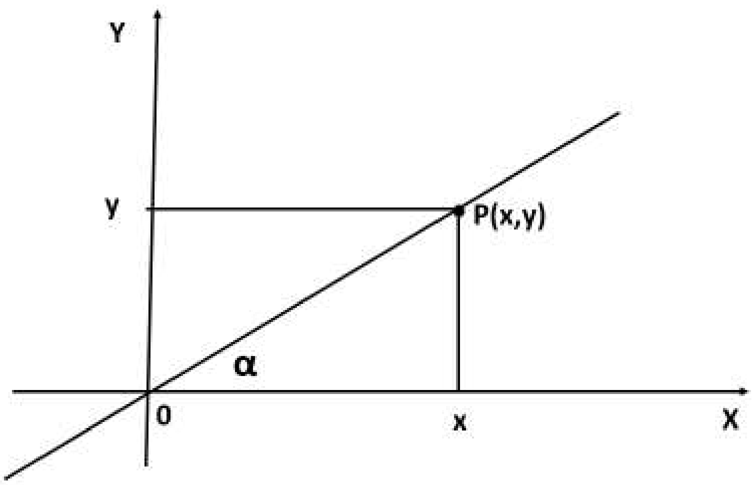
Dalla definizione di seno **sen α =** $\frac{h}{l}$ **h = l sen α**

h = 3,7 sen (19° 30') h = 3,7 • 0.3338 h = 1,24 km

Significato trigonometrico del coefficiente angolare di una retta

Nell'equazione di una retta nella forma **y = mx + q**, il coefficiente angolare **m** rappresenta la pendenza della retta.

Vogliamo ora legare **m** all'angolo che la retta forma con l'asse positivo delle X.

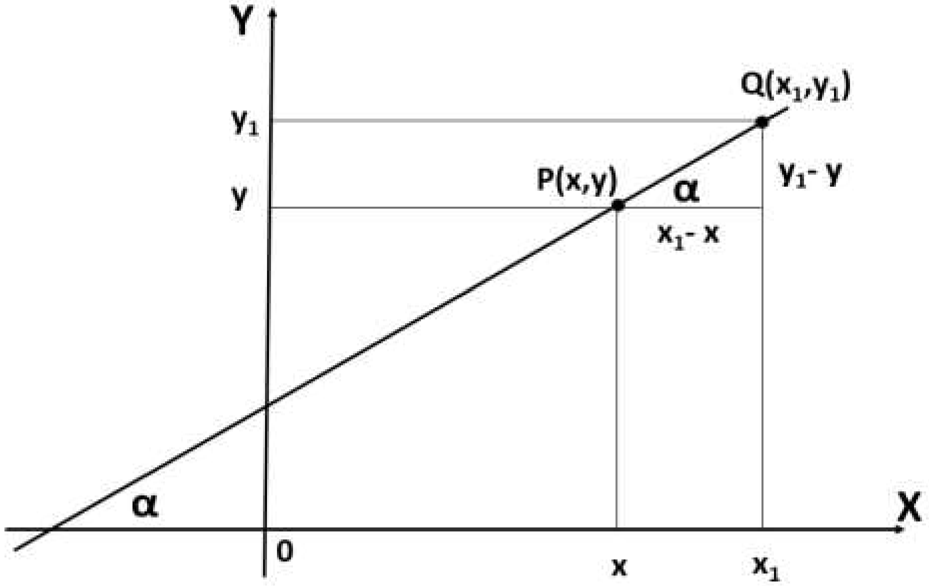


Consideriamo una retta che passa per l'origine. La sua equazione è **y = mx,** per cui **m =** $\frac{y}{x}$, ma questo rapporto, tra l'ordinata **y** e l'ascissa **x** di un punto qualsiasi **P** preso sulla retta, rappresenta la **tangente goniometrica** dell'angolo **α**.

Si dice allora che il ***coefficiente angolare m*** *rappresenta la* ***tangente goniometric****a dell'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle X.* Quanto affermato, dato che rette parallele hanno coefficiente angolare uguale, vale per tutte quante le rette non solo per quelle passanti per l'origine.

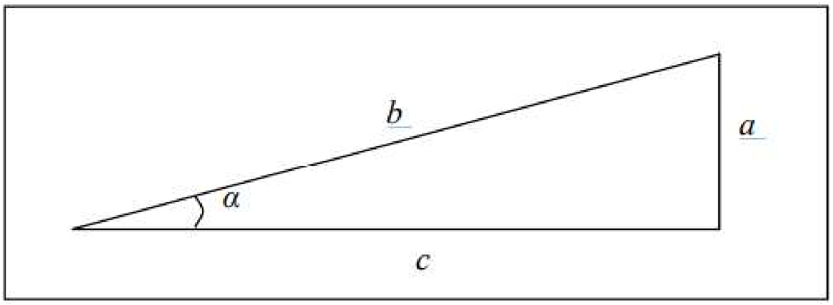
Se **P (x, y)** e **Q (x_1, y_1)** sono due punti qualsiasi di una retta, risulta, per quanto detto prima, che il coefficiente angolare, cioè la tangente goniometrica dell'angolo **α**, angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle X, vale:

$$m = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$



La pendenza

Il termine pendenza è usato per indicare il grado di ripidità o di inclinazione di una strada o di un tratto di percorso.
La pendenza di una strada è segnalata dai cartelli di pericolo (quelli triangolari), che la indicano con una percentuale.



La **pendenza topografica p_T** è, per definizione, il rapporto tra il dislivello **a** (cateto verticale) e la distanza orizzontale **c** (cateto orizzontale) tra due punti:

$$p_S = \frac{a}{c} \quad \text{e} \quad p_S\% = \frac{a}{c} \cdot 100$$

Si osservi che il contachilometri di un'auto indica la distanza effettivamente percorsa che è la distanza inclinata **b** (ipotenusa).
Per questo si definisce anche la **pendenza stradale p_S** come il rapporto tra a e b

$$p_S = \frac{a}{b} \quad \text{e} \quad p_S\% = \frac{a}{b} \cdot 100$$

Problema: determinare p_T e p_S in funzione dell'angolo **α** di inclinazione della strada.
Si osserva subito che la pendenza topografica p_T corrisponde, per le proprietà del triangolo rettangolo p_T = **tanα** , mentre la pendenza stradale p_S = **senα** .
Sui cartelli stradali di pericolo è indicata la pendenza p_S e non la p_T , in modo che l'automobilista, se ad esempio legge una pendenza del 10%, sa che ogni 1000 m percorsi (ovvero b=1000 m) è salito di 100 m (ovvero a=100m).

Si osservi anche come, per le pendenze tipicamente in gioco in Italia, non ci sia grossa differenza tra **pendenza topografica** e **pendenza stradale**, per piccoli angoli d'inclinazione α, le pendenze $\mathbf{p_S}$ e $\mathbf{p_T}$ hanno circa lo stesso valore dato che per angoli piccoli il valore del seno e quello della tangente praticamente coincidono.