Analisi:
alcune brevi note

a cura di Bruno Pizzamei

Sul concetto di moto

Il moto si riferisce al cambiamento di posizione di un oggetto nel tempo rispetto a un sistema di riferimento.

Il **moto rettilineo uniforme** è un tipo di movimento in cui un oggetto si sposta lungo una linea retta a velocità costante. Ciò significa che l'oggetto percorre distanze uguali in intervalli di tempo uguali e non subisce alcuna accelerazione.

La legge fondamentale del moto rettilineo uniforme è:

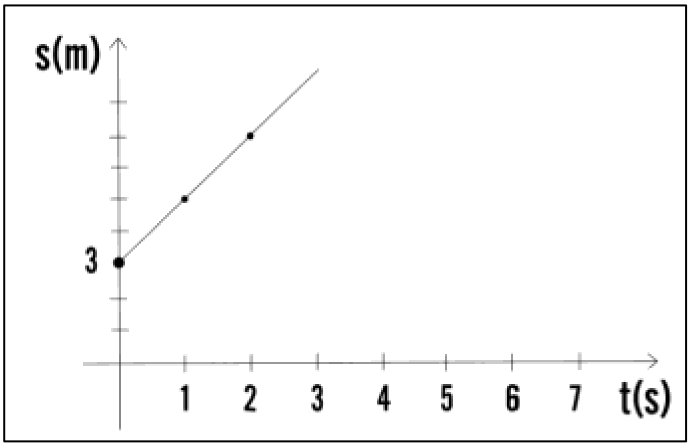
$$S_{(t)} = v \cdot t$$

dove:

S è la distanza percorsa,

v è la velocità costante,

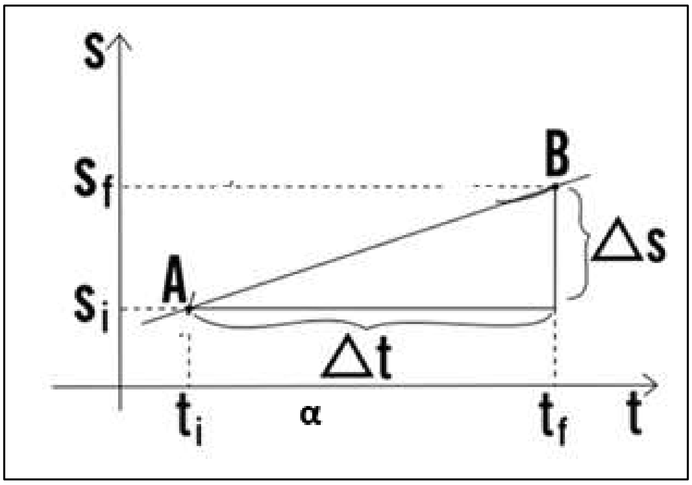
t è il tempo impiegato



t	S
0	3
1	5
2	7

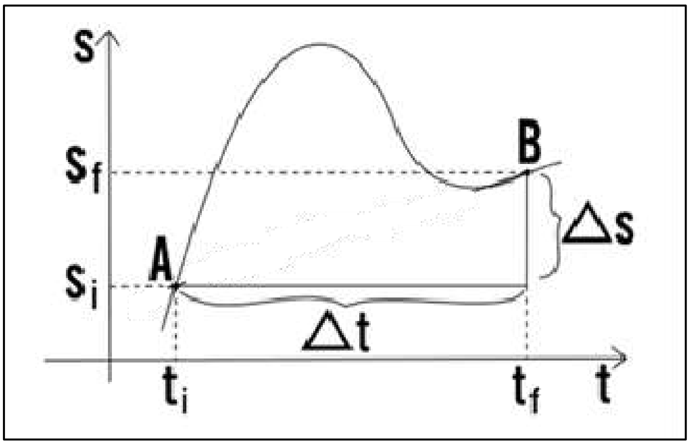
In questo caso le legge del moto risulta:

$$s = 3 + 2\,t$$



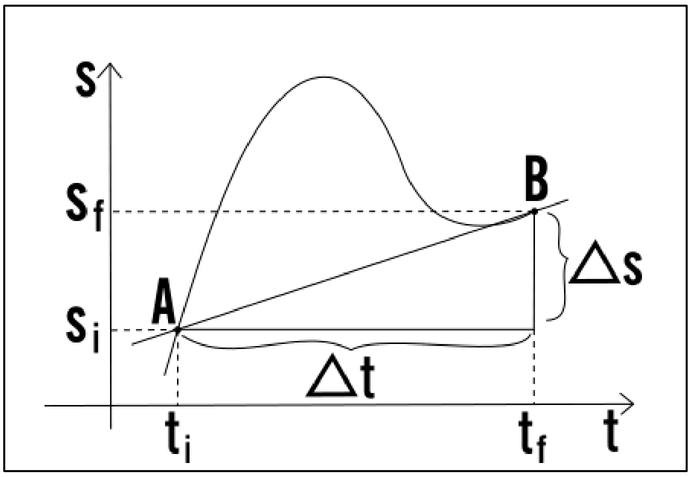
Considero la legge fondamentale del moto rettilineo uniforme:

$$\Delta S = S_f - S_i$$
$$\Delta t = t_f - t_i$$
$$\Delta S = v\,\Delta t$$
$$v = \Delta S / \Delta t$$
$$\Delta S / \Delta t = \tan(\alpha)$$



Si definisce moto **vario** un tipo di movimento in cui la velocità di un oggetto cambia nel tempo. A differenza del moto rettilineo uniforme, in cui la velocità è costante, nel moto vario un oggetto può accelerare, decelerare o cambiare direzione.

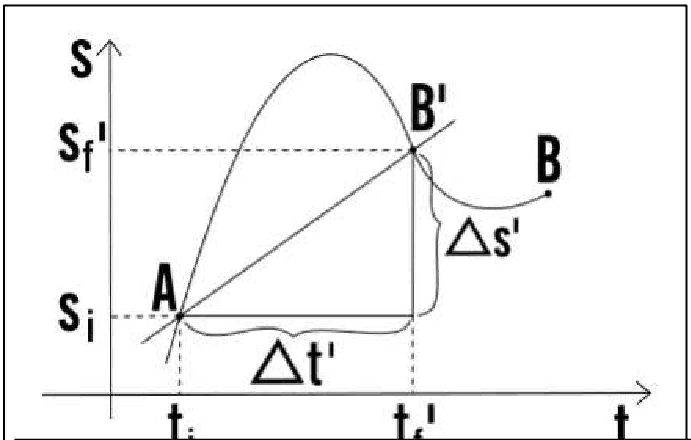
La **traiettoria**: è il percorso seguito dall'oggetto, che può



La **velocità media** rappresenta il rapporto tra la distanza totale percorsa da un oggetto e il tempo totale impiegato per percorrere quella distanza.
Posso considerarla come la velocità che avrebbe se il movimento tra il punto A e il punto B avvenisse con moto rettilineo uniforme.
La **velocità media** è calcolata dividendo la distanza totale percorsa per il tempo totale impiegato.

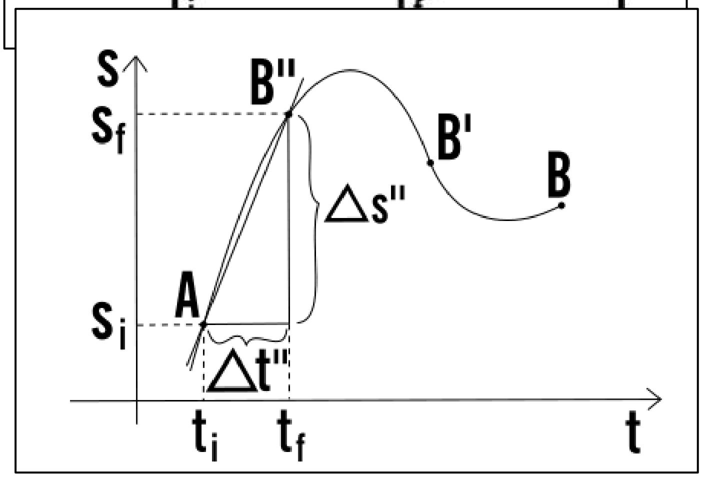
$$V_{(m)} = \Delta S/\Delta t$$

La **velocità media** quindi rappresenta la pendenza, il coefficiente angolare *(tangente trigonometrica dell'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse)* della retta secante i punti iniziali e finali

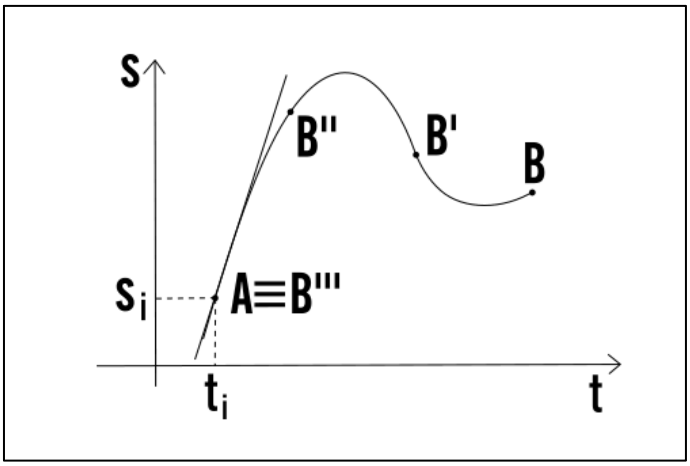


La **velocità istantanea** è la velocità di un oggetto in un preciso istante di tempo.
A differenza della velocità media, che tiene conto della distanza totale percorsa e del tempo totale impiegato, la velocità istantanea considera solo un singolo punto lungo la traiettoria del moto

$$V^{I}_{(m)} = \Delta S^{I}/\Delta t^{I}$$



$$V^{II}_{(m)} = \Delta S^{II}/\Delta t^{II}$$



La retta che con giunge A e B^{III} non è più la secante ma diventa la tangente nel punto considerato.

La velocità istantanea in un punto rappresenta la pendenza il coefficiente angolare *(tangente trigonometrica dell'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse)* della retta tangente nel punto.

$$V^{III}_{(m)} = \Delta S^{III}/\Delta t^{III}$$

ma

$$S_i = S_f \ldots \Delta S^{III} = 0$$

$$t_i = t_f \ldots\ldots \Delta t^{III} = 0$$

$$V^{III}_{(m)} = 0/0$$

Introduzione

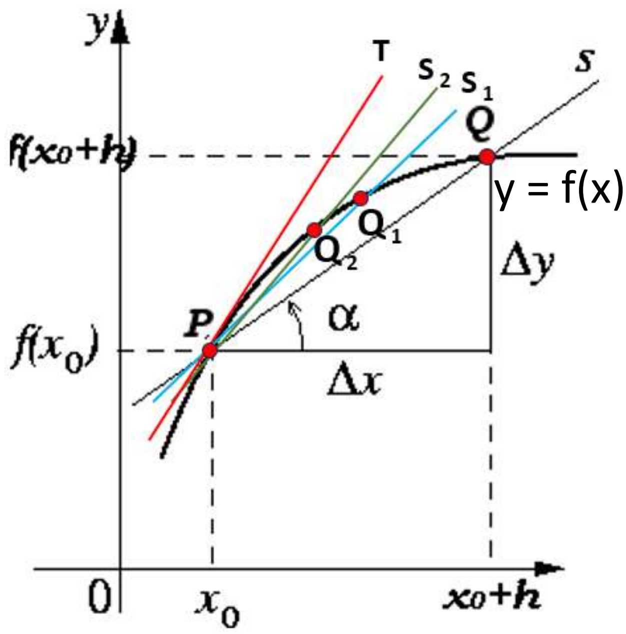
Nel quadro della grande svolta prodottasi nel pensiero scientifico durante il XVII secolo, lo sviluppo del pensiero matematico occupa una posizione di altissimo interesse, per l'importanza dei nuovi capitoli che vengono a far parte della matematica, sia per le innovazioni metodologiche, sia per gli strumenti concettuali forniti alle scienze della natura.

Questi capitoli sono la **geometria analitica** e l'**analisi infinitesimale**, della quale peraltro si possono trovare antecedenti significativi nel pensiero greco, in quello medievale e ancor di più in quello rinascimentale.

I problemi che portarono alla sistemazione dell'**analisi** furono sostanzialmente due:

a) **Il problema delle tangenti**:

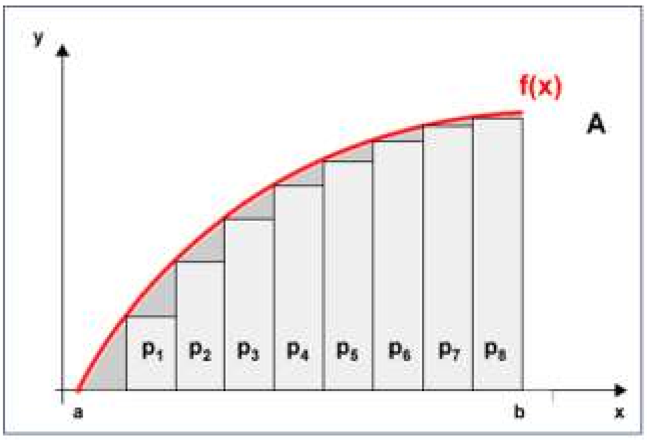
la determinazione, cioè delle rette tangenti ad una curva data, problema fondamentale del **calcolo differenziale**.

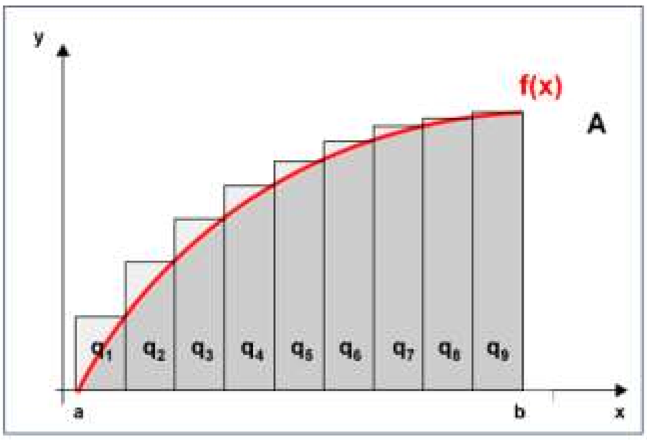


Il concetto di retta tangente ad una curva in un suo generico punto P, può essere definito considerando questa retta come caso particolare della retta secante che passa per il punto P e per il punto Q, quando questo assumendo le posizioni Q_1, Q_2 ecc. si avvicini infinitamente a P. **(1)**[1]

b) **Il problema della quadratura**:

la determinazione cioè dell'area limitata da una data curva, problema fondamentale del **calcolo integrale**.





Il calcolo di aree e di volumi poteva venir effettuato dividendo le figure in infinite parti infinitesime. L'idea non è nuova, ad essa pervennero Archimede **(2)** [2]successivamente Oresme (1323? - 1382), Keplero (1571 - 1630), Galilei (1564 - 1642) e la sua scuola. **(3)**[3]

Problemi e obiezioni

L'approfondimento dei temi che successivamente portarono all'impostazione dell'analisi matematica, fece pervenire ben presto a problemi di ben altro tipo e cioè quelli connessi all'infinitamente piccolo e all'infinitamente grande.

Si giunse alla necessità di considerare affermazioni come:

punto Q che si avvicina infinitamente al punto P,

dividere una figura in infinite parti infinitesime

da cui derivarono tutto una serie di domande.

- È lecito ricavare le proprietà del tutto (della figura nella sua interezza) partendo dalle proprietà delle infinite parti infinitesime che la compongono?
- È sufficiente dire che infinitesimo vuol dire quantità infinitamente piccola?
- Si possono definire dei concetti, tratti dalle scienze della natura, facendo ricorso a considera- zioni infinitesimali?
- Si può o non si può considerare il passaggio dal finito agli infinitesimi, come un'operazione matematica lecita?
- Si può costruire un calcolo capace di operare sulle grandezze infinitesime?
- Che significato ha l'affermazione, nel caso della tangente: *il punto Q infinitamente vicino al punto P?*
- È possibile dare una definizione geometrica seria al concetto di "*vicinanza infinita*"?

La possibilità di ottenere un risultato finito sommando infiniti termini sempre più piccoli, era stata intravista dai greci. Ma i pericoli di cadere nell'assurdo avevano indotto i matematici classici ad evitarla con scrupolo o a usarla solo con la massima cautela. **(4)** [4]

Se sono ben comprensibili i motivi, anche di ordine pratico che spingevano alcuni matematici del Seicento dall'algebra delle grandezze finite a quella delle grandezze infinitesime, altrettanto comprensibili sono i motivi che trattenevano alcuni altri dal pericoloso passo.

Questi ultimi che amavano chiamarsi *archimedei* erano convinti che non fosse lecito andare al di là dei greci e cioè far uso di considerazioni che questi avevano rigorosamente evitato, pena far perdere alla matematica la sua preminente caratteristica e cioè la non contraddittorietà **(5)**[5]

La serietà delle obiezioni non valse a fermare gli innovatori, anche perché, utilizzando i nuovi metodi, si era intravisto la possibilità di soluzione di problemi della fisica.

Essi, gli innovatori, i cosiddetti *anti archimedei* si mossero lungo due direttrici:

a) ricerca delle tecniche atte a determinare le aree racchiuse da curve di equazioni note;

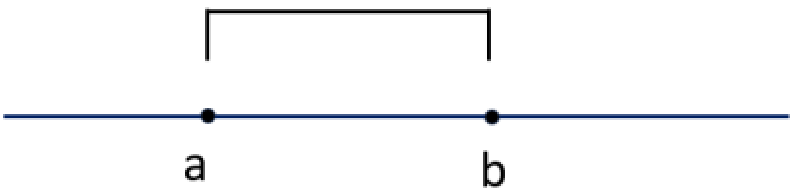
b) ricerca delle tecniche atte a determinare le tangenti a curve di equazioni note.

Lo sviluppo della geometria analitica diede aiuto la risoluzione di questi problemi. **(6)** [6]

Intervalli

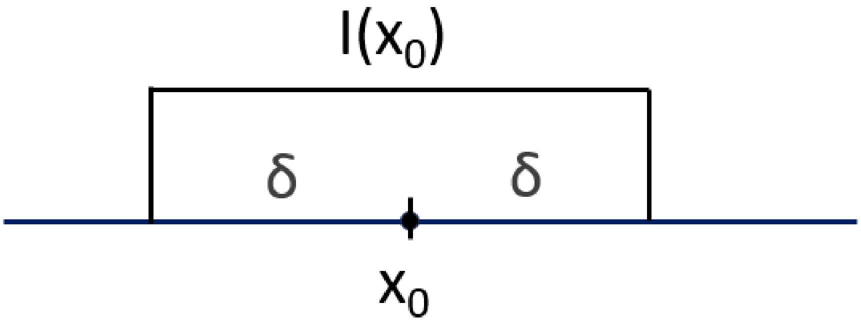
Dati due numeri reali **a** e **b** con **a < b** si chiama **intervallo** di estremi **a** e **b** il sottoinsieme **I** di **R** così definito: $\mathbf{I = \{x \in R : a < x < b\}}$

In altri termini è l'insieme di tutti i numeri reali compresi tra **a** e **b**. L'intervallo è aperto o chiuso a seconda se **a** e **b** appartengono o meno all'intervallo.



Intorni

Sia $\mathbf{x_0}$ un punto della retta orientata. L'intervallo di centro $\mathbf{x_0}$ e di lunghezza $\mathbf{2\delta}$, l'insieme cioè dei numeri reali **x** che soddisfano alla relazione $\mathbf{|x - x_0| \leq \delta}$ oppure $\mathbf{x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta}$ si dice **intorno** di $\mathbf{x_0}$



In altre parole dato un numero reale $\mathbf{x_0}$ si dice **intorno** di $\mathbf{x_0}$ ogni intervallo a cui $\mathbf{x_0}$ risulta interno.

Punti di accumulazione

Dato un punto x_0 e un insieme **A** si dice che x_0 è un **punto di accumulazione** di **A** se in ogni intorno di x_0 cade almeno un punto di **A**.

Un punto di un insieme che non sia di accumulazione si dice **isolato**.

Il concetto di limite

Si intende dare nelle pagine seguenti un'introduzione elementare, non sempre rigorosa, del calcolo, insistendo più sulla comprensione dei concetti che sul meccanismo formale. Si danno per acquisiti i concetti di coordinate cartesiane, di funzione, di grafico.

Nei lavori dei matematici del XVII secolo mancava il **concetto di limite**. Tentiamo di accostarci ad esso a partire dalle successioni.

Limite di una successione

Successione *è un insieme di elementi posti in corrispondenza con l'insieme dei numeri naturali è cioè una regola che fa corrispondere a ogni* $n \in \mathbf{N}$ *un unico* $a_n \in \mathbf{R}$.

Per indicare una successione si usa la notazione

$a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots a_n, \ldots$

Successione numerica è una successione nella quale i termini a_n sono numeri reali.

Consideriamo la successione il cui n-esimo termine è $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, ∞

$1, \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ldots \ \frac{1}{n}$

Si dice che questa successione al crescere di n ha per limite **0**, in simboli: $\frac{1}{n} \to 0$ per $n \to \infty$

Proviamo ad enunciare esattamente il significato di questa proposizione. Man mano che si procede nella successione, i suoi termini diventano sempre più piccoli: dopo il centesimo, tutti i termini sono minori di $\frac{1}{100}$, dopo il millesimo sono tutti minori di $\frac{1}{1000}$ e così via.

Nessuno dei termini assume effettivamente il valore 0. Ma se si va *"abbastanza lontano"* nella successione, si può essere sicuri che ciascuno dei suoi termini differirà da **0** *"tanto poco quanto si vuole"*.

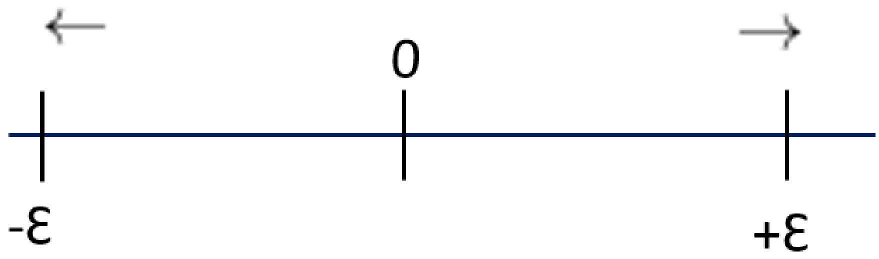
Cosa significa ***abbastanza lontano?***

Cosa significa ***tanto poco quanto si vuole****?*

Si può dare un significato preciso alla relazione di **limite** soltanto se si attribuisce un significato preciso a queste espressioni.

Un'interpretazione geometrica può aiutare a chiarire la situazione.

Se si rappresentano i termini della successione sulla retta orientata, tali termini sono rappresentati da punti che si addensano intorno al punto 0. Si sceglie un intervallo **I** con centro nel punto **0** e di ampiezza totale **2 ε** (**ε** *"epsilon"* è un numero positivo arbitrario), in modo che l'intervallo si estenda di un segmento **ε** a sinistra e a destra del punto **0**.



Se si sceglie $\boldsymbol{\varepsilon = 10}$, allora tutti i termini $\mathbf{a_n = \frac{1}{n}}$ della successione, si trovano nell'intervallo **I**.

Se si sceglie $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$, alcuni dei primi termini si trovano al di fuori di **I**, ma tutti i termini da $\mathbf{a_{11}}$ in poi: $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{11}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{13}}, \ldots$ sono interni ad **I**. Se si sceglie $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1000}}$, soltanto i primi 1000 termini della successione non sono interni a **I**, mentre dal termine $\mathbf{a_{1001}}$ in poi tutti gli altri infiniti termini saranno interni a **I**.

Questo ragionamento vale per ogni numero positivo arbitrario **ε.**

Non appena scelto un numero positivo **ε**, non importa quanto piccolo, si può trovare un numero intero **k** tale che $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}} < \boldsymbol{\varepsilon}$.

Da ciò segue che tutti i termini $\mathbf{a_n}$ della successione per cui $\mathbf{n > k}$, saranno interni a **I**, e soltanto il numero finito di termini $\mathbf{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k-1}}$ possono cadere all'esterno.

Il punto importante è che scegliendo **ε** si assegna a piacere l'ampiezza dell'intervallo. Poi si può scegliere un numero intero k conveniente.

Questo procedimento (lo scegliere prima un numero **ε** e il trovare poi un opportuno numero intero **k**) può essere applicato per qualsiasi numero positivo **ε** e dà il preciso significato all'affermazione: tutti *i termini della successione differiranno da **0** per tanto poco quanto si vuole, purchè, si vada abbastanza lontano nella successione.*

Sulla base di quanto detto sopra si può dare una definizione esatta dell'affermazione: *la successione dei numeri reali* $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ *ha per limite* a *al tendere di* n *all'infinito, se per ogni numero positivo* ε *non importa quanto piccolo, si può trovare un numero intero* k *(dipendente da* ε*) tale che* $|a - a_n| < \varepsilon$ *per tutti i valori* $n \geq k$.

(Si presti particolare attenzione alle parole ***per ogni*** *e si* ***può trovare****)*

In simboli: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

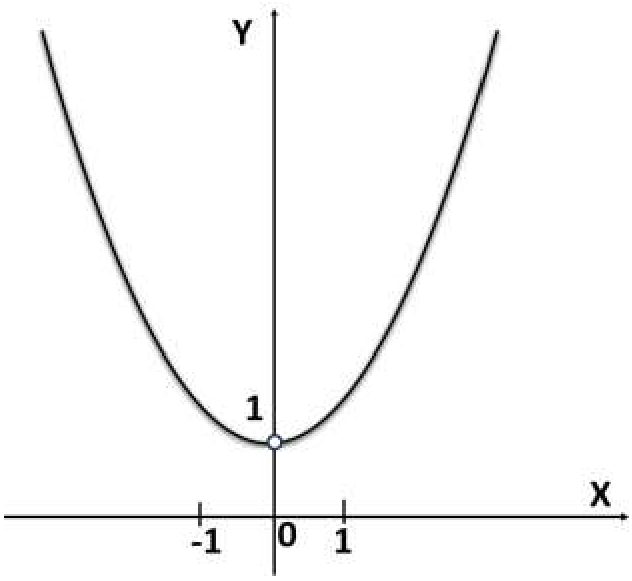
Errore da evitare è quello di pensare che il limite per $n \to \infty$ possa essere eseguito semplicemente sostituendo $n = \infty$ nell'espressione di a_n, ad esempio $\frac{1}{n} \to 0$ perchè $\frac{1}{\infty} = 0$, ma ∞ non è un numero e questo uso è quindi illegittimo.

Limite di una funzione

Tentiamo ora di accostarci al limite di una funzione **(7)**[7] e dare un significato alla proposizione:

la funzione $y = f(x)$ *della variabile* x *ha per limite* l *al tendere di* x *a* x_1.

Partiamo da un esempio particolare.



La funzione $y = \frac{x^3 + x}{x}$

è definita per ogni valore di $x \neq 0$.

Guardando il grafico risulta evidente che per valori di x appartenenti ad un **intorno** di **0** se **x** si approssima a **0** da destra e da sinistra, il valore corrispondente di **y** si approssima al valore **1**.

Calcoliamo ora una formula che esprima la differenza **f(x) - 1**.

$$y - 1 = \frac{x^3 + x}{x} - 1 = \frac{x^3 + x - x}{x} = \frac{x^3}{x}$$

Se si conviene di considerare soltanto valori di x prossimi a 0 (ma non $x = 0$) $y - 1 = x^2$

Si può rendere questa differenza piccola quanto si vuole, limitando **x** a un **intorno** sufficientemente piccolo di **0**. Così per:

$x = \pm \frac{1}{10}$ $\quad f(x) - 1 = \frac{1}{100}$

$x = \pm \frac{1}{100}$ $\quad f(x) - 1 = \frac{1}{10.000}$

Più generalmente, se **ε** è un **numero positivo qualsiasi**, la differenza tra **f(x)** e **1**, sarà minore di **ε,** purchè la distanza di **x** da **0** sia minore di un numero **$\delta = \sqrt{\varepsilon}$.**
Infatti se $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ $|f(x) - 1| = |x^2| < \varepsilon$

L'analogia di questa definizione con quella già data per il limite di una successione è completa. Partendo dall'esempio trattato si giunge quindi alla definizione di limite enunciata per la prima volta da Cauchy intorno al 1820:

*la funzione **f(x)** ha per limite **l** per **x** $\rightarrow$ **x_1** se in corrispondenza a ogni numero positivo **ε**, e non importa quanto piccolo, si può trovare un numero positivo **δ** (dipendente da **ε**) tale che*

$$|f(x) - l| < \varepsilon \text{ per ogni } x \neq x_1 \text{ che soddisfi la disuguaglianza } |x - x_1| < \delta .$$

Quando questo accade si scrive:

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = l \qquad f(x) \rightarrow l \qquad x \rightarrow x_1$$

Nel caso della funzione precedentemente considerata $y = \frac{x^3 + x}{x}$ si è visto che **f(x)** ha per limite **1** quando **x** tende al valore **$x_1 = 0$**. Basta scegliere opportunamente $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Osservazioni sul concetto di limite

Nel loro studio del moto e delle variazioni, i matematici del XVII e del XVIII secolo accettavano come evidente il concetto che una quantità x mutasse costantemente e si muovesse con un *"fluire"* continuo verso un valore limite x_0. Associato a questo fluire del tempo, o di una quantità x che si comportasse come il tempo, consideravano un valore y = f(x) che seguiva il variare di x.

Il problema era di attribuire un significato matematico preciso all'idea che f(x) *"tende"* o si *"approssima"* a un valore determinato **l** quando x tende a x_0. **(8)**[8]

Cauchy si rese conto che doveva essere accantonata ogni precedente idea intuitiva di moto continuo, e per questo formulò una definizione per così dire *"statica"*, senza presupporre quindi un'idea intuitiva di moto. Il nocciolo del ragionamento consiste nella possibilità di trovare gli opportuni valori di **δ** e **ε**.

La variabile indipendente non si muove. Dapprima si fissa l'attenzione su un margine **ε** per la variabile dipendente e poi si cerca di determinare un conveniente margine **δ** per la variabile indipendente. L'espressione "***f(x)*** $\rightarrow$ ***l per x*** $\rightarrow$ ***x_0***" è soltanto un modo abbreviato di dire che questa determinazione può essere ripetuta per ogni numero positivo **ε**.

Ancora una considerazione: facendo tendere x a x_0, si può ammettere che x sia maggiore o minore di x_0, ma si deve escludere che possa essere uguale, imponendo che $x \neq x_0$. Il valore di x tende a x_0 ma non assume mai effettivamente questo valore. Si possono considerare quindi funzioni che non sono definite per $x = x_0$, ma che abbiano limite determinato per $x \to x_0$.

Esiste la possibilità di calcolare, se esistono, limiti di funzioni, ma questo esula dallo scopo di questo lavoro.

Insiemi discreti, densi e continui

In matematica, fisica e filosofia i termini **discreto** e **continuo** assumono diversi significati a seconda del periodo storico e del contesto. Una definizione intuitiva, anche se imprecisa, è la seguente: un *oggetto* è considerato ***discreto*** se è costituito da elementi ***isolati***, cioè non contigui tra loro, mentre è considerato ***continuo*** se contiene infiniti elementi e se tra questi elementi non vi sono spazi *vuoti*.

Un insieme, come quello dei numeri interi naturali (1, 2, 3…) e quello dei numeri interi relativi, è **discreto** perché ogni numero ne ha uno successivo.

Un insieme numerico **I** è **denso** se, per ogni **a** e **b** in **I** con **a** che precede **b** nell'ordine, tra **a** e **b** sono compresi infiniti elementi dell'insieme.

Un insieme numerico può essere rappresentato con una retta i cui punti corrispondono agli elementi dell'insieme. Un insieme numerico è **denso** se comunque si considerino due elementi, pur vicinissimi, è sempre possibile inserirne un terzo tra essi.

Un insieme si dice **continuo** se è ordinato, denso e completo.

Gli insiemi **N** e **Z** non sono continui perchè sono insiemi ordinati ma discreti.

L'insieme **Q** è ordinato, denso, ma non è continuo perchè non è completo. In termini semplici, pur essendo denso, Q non ricopre tutti i punti della retta reale, perchè tra i suoi elementi vi sono degli spazi liberi che sono occupati dagli irrazionali.

L'insieme R dei numeri reali è continuo.

Funzioni continue

Da un punto di vista intuitivo, una **funzione** è **continua** quando è possibile tracciare il suo grafico *"senza staccare la penna dal foglio"*.

La nozione di limite di una funzione per $x \to x_0$ è del tutto indipendente dall'eventuale valore $f(x_0)$ che la funzione assume in x_0.

Una vasta e importante classe di funzioni continue sono caratterizzate da una stretta relazione tra il valore che la funzione assume in un punto x_0 e i valori assunti dalla funzione nelle vicinanze di x_0. In prima approssimazione si può dire che la funzione **y=f(x)** è **continua** in un punto $\mathbf{x_0}$ quando avviene che per i punti x vicini a x_0 i corrispondenti valori di **f(x)** sono vicini a **f(x_0).**

Utilizzando la definizione di limite, affermiamo: *una funzione y=f(x) è continua in un punto $x_0 \in R$ se vi è **definita** ed il suo limite, per $x \to x_0$, coincide con il valore della funzione in x_0:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Una funzione si dice **continua** in un **intervallo** se è continua in ogni punto dell'intervallo.

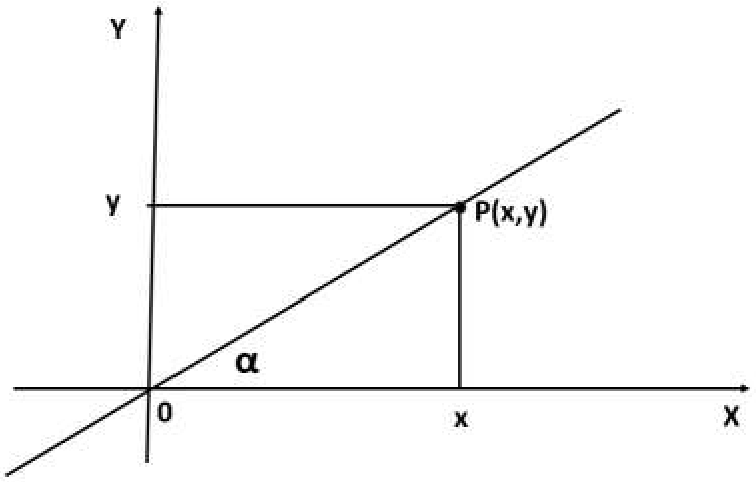
Una funzione si dice **continua** se è continua in ogni punto del suo dominio.

Derivata

Si consideri il seguente problema: nel piano cartesiano vogliamo trovare l'equazione della retta tangente in un determinato punto ad una curva di equazione nota.

Facciamo un passo indietro. Osservando i parametri di una retta nella forma **y = mx + q**, diciamo che il coefficiente angolare **m** rappresenta la pendenza della retta.

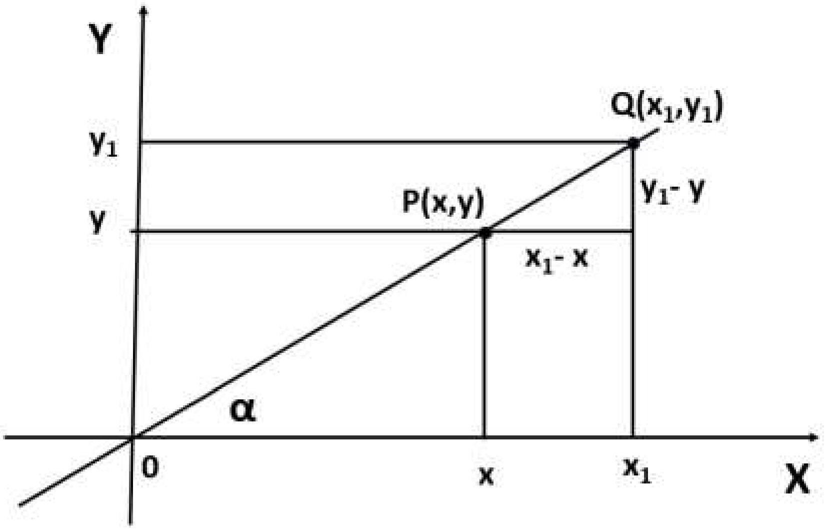
Vogliamo ora legare **m** all'angolo che la retta forma con l'asse positivo delle X.



Consideriamo una retta che passa per l'origine. La sua equazione è **y = mx,** per cui **m =** $\frac{y}{x}$, ma questo rapporto, tra l'ordinata **y** e l'ascissa **x** di un punto qualsiasi **P** preso sulla retta, rappresenta la **tangente goniometrica** dell'angolo **α**. Si può quindi dire che il *coefficiente angolare m rappresenta la tangente goniometrica dell'angolo che la retta forma con il semiasse* *positivo delle X.* Quanto affermato, dato che rette parallele hanno coefficiente angolare uguale, vale per tutte quante le rette non solo per quelle passanti per l'origine.

Se **P (x, y)** e **Q (x_1, y_1)** sono due punti qualsiasi di una retta, risulta, per quanto detto prima, che il coefficiente angolare, cioè la tangente goniometrica dell'angolo **α**, angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle X, vale:

m = $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$

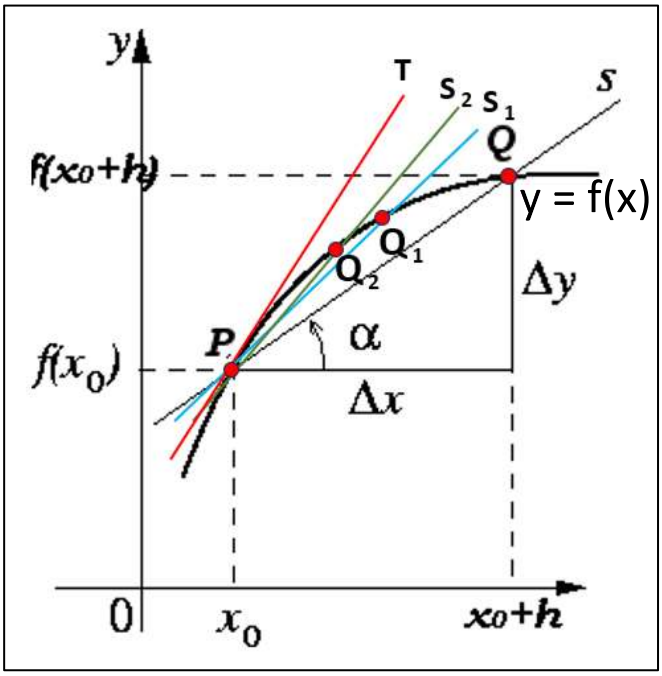


Se la curva appartiene alla famiglia delle coniche (ellisse, circonferenza, parabola, ecc..), il problema risulta relativamente semplice: si costruisce un sistema di equazioni, l'equazione della conica e quella della retta, operando in modo che il sistema in questione abbia un'unica soluzione, cioè l'intersezione delle due curve si riducano ad un punto solo.

Se la conica in questione risulta essere una circonferenza il problema è ancora più semplice: noto il punto per cui si voglia tracciare una retta tangente, basta portare il raggio della circonferenza in quel determinato punto e costruire la retta perpendicolare al raggio in quel punto; così si sarà trovata la retta tangente per una nota proprietà della circonferenza.

.

Per una curva generica avente equazione **y = f(x)** il problema risulta più complesso. Viene risolto in questa maniera: si consideri il grafico della curva in questione e su di esso segniamo il punto **P** in cui si vuole tracciare la retta tangente; esso avrà coordinate **P (x_0, y_0)**. Si consideri un secondo punto **Q (x_1, y_1)** e una retta **s** secante i due punti.



Per determinare la tangente, si può far avvicinare il punto **Q** a quello di tangenza **P**.

Si vede graficamente che la retta man mano che Q si avvicina a P, tenderà alla tangente alla curva in P e cambierà la sua inclinazione.

Cerchiamo ora di formalizzare questo discorso intuitivo in modo da avere la rappresentazione analitica di quello che abbiamo fatto, in modo da poter ragionare anche senza alcun "*disegno*".

Quando il punto **Q** tende al punto **P** la retta secante **s** tende alla retta tangente **t**.

Facciamo allora riferimento a quanto detto precedentemente sul concetto di limite e indichiamo simbolicamente:

$$\lim_{Q \to P} s = t$$

Come si vede il discorso rimane ancora nebuloso anche se formalmente un po' più corretto. Così possiamo indicare con formalismo matematico tutto ciò che abbiamo realizzato, cioè tutto il discorso sullo *"spostamento"* del punto Q sulla curva con conseguente *"spostamento"* della retta secante i due punti in questione, fino ad ottenere la retta tangente.

Quanto considerato può essere riassunto e guardato come un limite, cioè il limite di Q che tende a P. Questo non ci soddisfa ancora perchè, non ci dice niente sotto l'aspetto quantitativo, o più semplicemente non abbiamo avuto niente a che fare con i numeri.

Per iniziare il nostro discorso possiamo fare riferimento alla figura seguente.

Per prima cosa fissiamo i due punti,

uno è il punto **P (x, y)** e l'altro è **Q (x_1, y_1).**

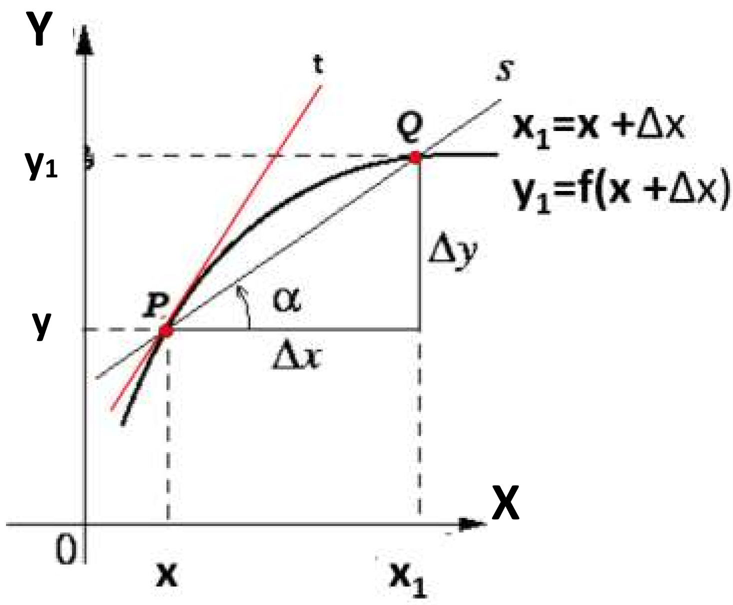
Le ascisse dei due punti differiranno di una quantità **Δx** (incremento della variabile indipendente) e che per nostra convenienza sarà positivo.

Indicheremo allora l'ascissa **x_1** del punto **Q**: **x_1 = x +Δx**.

L' ordinata del punto **Q** sarà **y_1 = f(x_1)**, e quindi **y_1 = f(x +Δx)**

Le sue coordinate saranno quindi

Q (x+Δx, f(x+Δx). **(9)**[9]



Sorge ora il problema di come legare il comportamento della retta all'avvicinarsi indefinitamente del punto Q al punto P.

Possiamo vedere che viene modificata l'inclinazione della retta o più propriamente l'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse, varia quindi il **coefficiente angolare**, la **tangente goniometrica**, **(10)**[10] di quest'angolo.

Possiamo realizzare lo "*spostamento* "del punto **Q** agendo su **Δx** che prima abbiamo indicato come la differenza delle ascisse dei due punti: se noi riduciamo il valore di **Δx** notiamo che il punto Q tende ad avvicinarsi al punto P.

Facendo decrescere Δx indefinitamente, facendolo cioè tendere **Δx** → **0**, i due punti tenderanno a coincidere e per il discorso precedentemente fatto, la retta secante tenderà alla retta tangente. Adesso non rimane che formalizzare ulteriormente il discorso e considerare ciò che avviene del coefficiente angolare **m**.

Dunque risulta: $\mathbf{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}$

Possiamo ricordare che m = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ viene indicato come **rapporto incrementale** perchè risulta essere il rapporto tra l'incremento della variabile dipendente e quello della variabile indipendente e come si diceva, rappresenta il coefficiente angolare della retta secante la curva nei punti P e Q.

Nell'espressione scritta sopra, calcolando questo limite non facciamo altro che trovare il coefficiente angolare della retta tangente alla curva nel punto P.

Ricapitolando possiamo dire che la posizione limite della retta secante risulta essere la retta tangente e che possiamo indicare ciò con una semplice scrittura di limite che racchiude il concetto sopra esposto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \mathbf{m} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} = \mathbf{f'(x)}$$

Questo limite viene definito **derivata** di f(x) rispetto a x nel punto P (x, y) risulta essere, come si diceva, il coefficiente angolare della retta tangente in P.

Osserviamo bene la scrittura di limite: a prima vista sembra che per calcolarlo basti sostituire a **Δ**x lo **0**, ma così facendo si incorre nella spiacevole esperienza di avere a che fare con una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Non si potrebbe quindi ricavare alcun parametro della retta tangente, pur essendo sicuri che essa esiste. Ma allora dove sta l'errore?

Semplicemente, nel fatto che nel calcolo del limite non è richiesto il comportamento della funzione nel punto preciso ma in un suo intorno piccolo a piacere.

Tirando le somme possiamo dire che con il simbolo **f'(x)** (leggasi effe primo di x) si intende la ***derivata*** di ***f(x)*** rispetto a ***x*** che viene definita come ***il limite del rapporto incrementale per l'incremento della variabile indipendente che tende a 0***.

Per ottenere la *derivata*, il *limite deve esistere* ed *essere finito*.

Quindi una funzione è derivabile nel punto P se tale limite esiste ed è finito, una funzione è derivabile in un intervallo I se è derivabile in ogni punto dell'intervallo.

Calcoliamo ora, come esempio, la derivata della funzione $\mathbf{y = x^2}$, il che vuol dire trovare il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola.

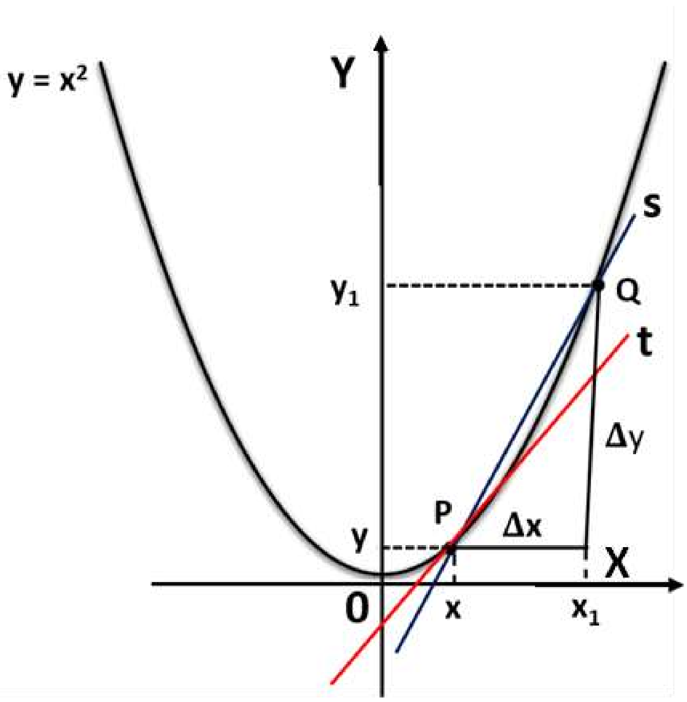
Il coefficiente angolare della retta secante la parabola nei punti P e Q risulta:

$$\mathbf{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

$\mathbf{f(x) = x^2}$

quindi

$$\mathbf{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{x_1{}^2-x^2}{x_1-x}$$



Passando alla definizione di derivata come il limite del rapporto incrementale per l'incremento della variabile indipendente **Δx** → **0**.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x}$$

L'equazione della funzione di cui vogliamo calcolare la derivata è **y = x²** per cui sviluppando i calcoli:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + \Delta x^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

La forma non risulta più indeterminata, il limite si ottiene per *"sostituzione"* **(11)**[11]**:**

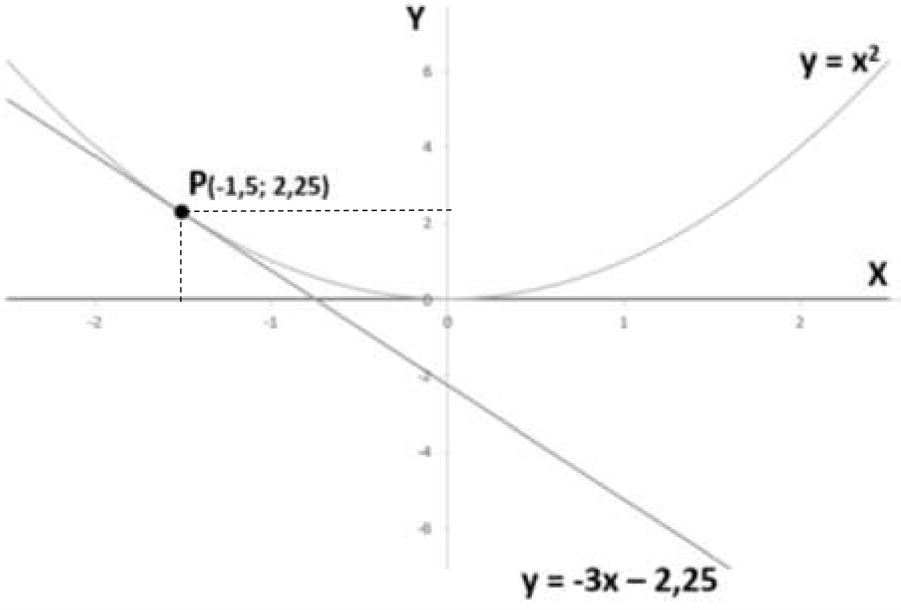
$$\lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x \quad \text{per cui} \quad m = 2x$$

Quindi per **f(x) = x^2** **f'(x) = 2x** **(12)**[12]

Con quanto appena appreso vogliamo costruire la retta tangente alla parabola **y = x^2** nel punto **P (-1,5 ; 2,25)**.

La derivata di **y = x^2** risulta essere **y' = 2x** che rappresenta **m coefficiente angolare** della retta tangente alla parabola.

In **P** quindi il coefficiente angolare della retta tangente risulta **m = 2(-1,5) = -3**.



Si tratta ora di calcolare il valore di **q**, ordinata all'origine, nell'equazione della retta **y = mx + q** con **m =-3** e passante per **P (-1,5; 2,25)**, quindi sostituendo i valori: **2,25 = -3 (-1,5) + q,** risulta allora **q = - 2,25.**

La retta tangente alla parabola in **P** ha come equazione **y = - 3x – 2,25**

Abbiamo visto che se $\mathbf{y = x^2}$ la derivata sarà **y' = 2x**. Con un procedimento analogo si può dimostrare che se $\mathbf{y = x^n}$ $\mathbf{y' = n\, x^{n-1}}$.

Ovviamente esiste la possibilità di calcolare le derivate delle funzioni, ma questo calcolo esula dallo scopo del nostro lavoro.

Alcune considerazioni sulla derivata

La derivata è uno dei concetti basilari dell'analisi matematica.

La derivata studia le variazioni del valore y = f(x) della funzione a fronte di variazioni infinitesime della variabile x.

Più in generale, la derivata esprime la variazione di una grandezza rispetto a un'altra: il campo di applicazioni è vastissimo.

Il calcolo della derivata di una funzione è usato in fisica per calcolare la velocità e l'accelerazione istantanee di un corpo, in economia per studiare il prodotto marginale di una funzione di produzione (quantità di prodotto addizionale che si ottiene impiegando una unità di fattore in più rispetto a quelle già impiegate), in statistica per calcolare il tasso di crescita demografico di una popolazione (rapporto fra la variazione della popolazione in un dato anno e la popolazione media di quell'anno per mille individui) e così via.

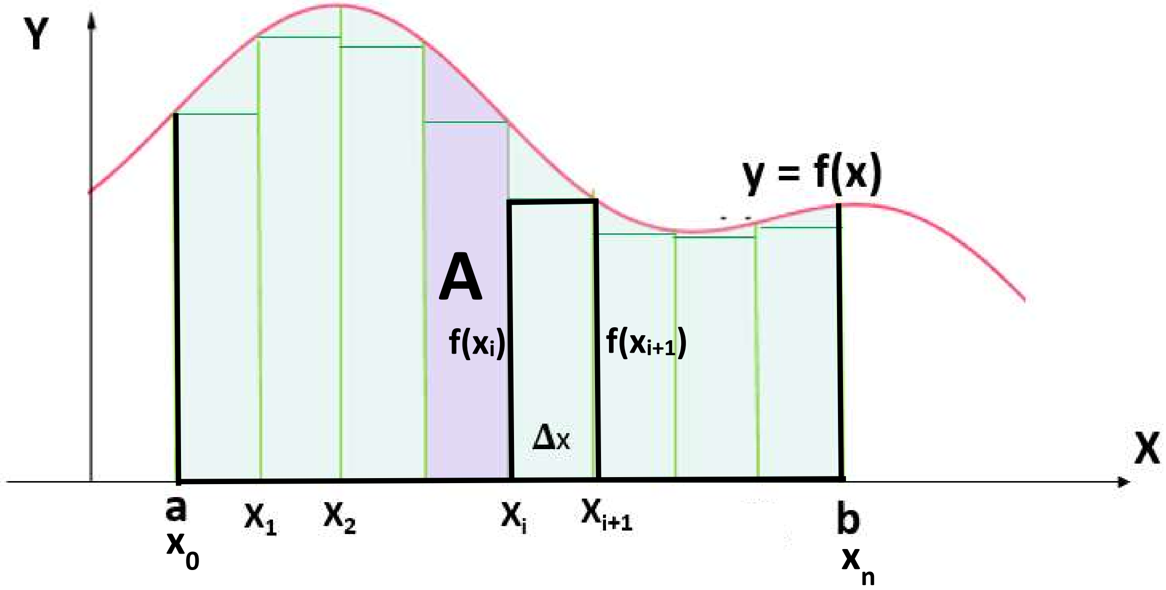
La derivata di una funzione permette di individuare inoltre se la funzione generica possiede dei punti critici, ovvero punti di massimo o di minimo.

Integrali

Si diceva all'inizio di come procedere per calcolare l'area limitata da una data curva.

Introduciamo il concetto di integrale legandolo all'area di una superficie piana delimitata inferiormente dal segmento dell'asse **X** che va dall'ascissa **a** all'ascissa **b**, dai **due lati perpendicolari all'asse X** passanti rispettivamente per **a** e per **b** e da una curva di equazione

y = f(x).



Suddividiamo l'intervallo compreso tra **a** e **b** in un certo numero di piccoli intervalli parziali, tracciamo per ciascun punto della suddivisione la perpendicolare a **X**, e sostituiamo ogni striscia al di sotto della curva con un rettangolo.

Come base di ogni rettangolo sarà preso un intervallo parziale **Δ**x ottenuto suddividendo l'intervallo da **a** a **b** in **n** parti, che per semplicità supporremo uguali:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_{i+1} - x_i$$

Indicheremo i punti di suddivisione con:

$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\,\Delta x, \ldots, x_n = a + n\,\Delta x = b.$

Come altezza di ogni rettangolo si può scegliere il valore **y = f(x)** nell'estremo destro dell'intervallo parziale. Allora la somma delle aree di questi rettangoli sarà

$S_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \ldots + f(x_n)\,\Delta x$ che si abbrevia con

$Sn = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$

In generale il simbolo $\sum_{i=1}^{n} a_i$ che si legge **sommatoria** per **i** che va da **1** a **n** indica la somma di tutte le espressioni ponendo successivamente **i = 1, 2, 3,……n,**

Costruiamo ora una successione di questi valori approssimati S_n in cui n cresca indefinitamente, in modo che in ciascuna somma cresca il numero dei termini, mentre ogni singolo termine $f(x_i)\,\Delta x \to 0$ a causa del fattore $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Al crescere di **n**, questa somma tende all'area **A**

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)dx \quad (13)^{13}$$

L'integrale **definito** di una funzione f(x) in un intervallo [a, b] è un **numero reale** che misura l'area A compresa tra la funzione e l'asse delle ascisse **X**, delimitata dai due segmenti verticali che congiungono gli estremi [a, b] al grafico della funzione

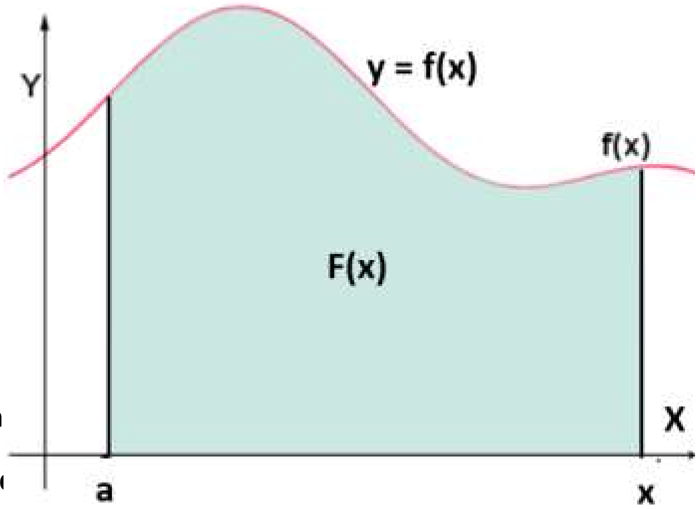
Come per i limiti e per le derivate, esistono regole che permettono di calcolare integrali delle funzioni.

Il teorema fondamentale del calcolo

I due procedimenti di passaggio al limite, apparentemente non collegati, di derivazione e di integrazione di una funzione, sono in realtà l'uno l'inverso dell'altro, come ad esempio la addizione e la sottrazione e la moltiplicazione e la divisione. **(14)**[14]

Consideriamo l'integrale di una funzione **y = f(x)** dall'estremo inferiore **a fisso** all' estremo superiore **variabile x.** Se è definita la funzione **f(x**) ed è fissato l'estremo inferiore **a**, **F(x**) risulta funzione esclusivamente di **x**. Si scrive:

F(x) =$\int_a^b f(x)dx$



per indicare che si vuol studiare l'integrale come funzione **F(x**) dell'estremo superiore **x**. Questa funzione **F(x**) è l'area limitata dalla curva **y = f(x)** dall'estremo **a** all'estremo **x**.

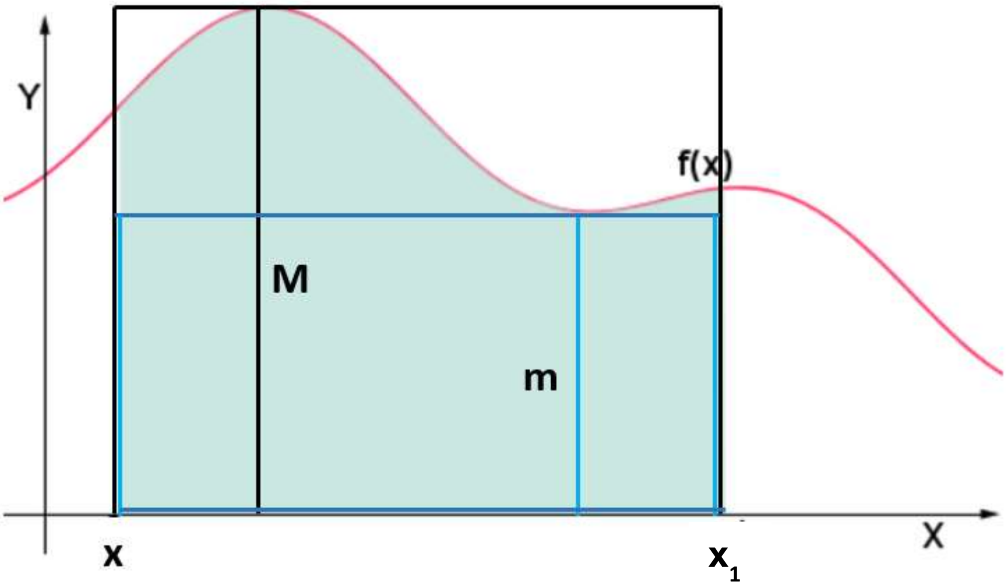
Il teorema fondamentale del calcolo si en

La derivata di un integrale indefinito F(x), consi

valore di y nel punto x:

$$F'(x) = f(x)$$

In altre parole, il procedimento di integrazione, che conduce dalla funzione **f(x**) alla **F(x)** è invertito dal procedimento di derivazione applicato a **F(x)**.



L'incremento **$F(x_1)$ - F(x)** è semplicemente l'area compresa tra **x** e **x_1** e si vede come quest'area è compresa tra i prodotti **(x_1 - x) m** e **(x_1 - x) M**, dove **m** e **M** sono rispettivamente il **minimo** e il **massimo** valore di **f(x)** nell'intervallo da **x** a **x_1** :

(x_1 - x) m ≦ $F(x_1)$ - F(x) ≦ (x_1 - x) M quindi $m \leq \frac{F(x_1) - F(x)}{x_1 - x} \leq M$

Supponendo che la funzione sia continua se **x_1** tende a **x**, sia **m** che **M** tendono a **f(x)**. Si ha perciò:

$$F'(x) = \lim_{x_1 \to x} \frac{F(x_1) - F(x)}{x_1 - x} = f(x)$$

Intuitivamente risulta che la variazione dell'area delimitata dalla curva **y = f(x)** al crescere di **x** è uguale all'ordinata della curva nel punto **x**.

Si dice anche che l'integrale **F(x)** con estremo inferiore fisso ed estremo superiore variabile **x** è una **funzione primitiva** di **f(x).**

Per calcolare l'integrale

$$\int_b^a f(x)dx$$

basta trovare (ovviamente esistono regole di integrazione) una funzione G(x) tale che G'(x) = f(x) e quindi calcolare la differenza G(b) - G(a).

Volendosi staccare dal concetto di integrale come area (l'integrale fino adesso considerato si diceva **definito**) si può introdurre il concetto di integrale **indefinito** e di **funzione primitiva**:

se G(x) è una funzione la quale, in ogni punto di un intervallo (a, b) abbia per derivata la funzione f(x), si dice che G(x) è una funzione primitiva di f(x).

In questo modo si abbandona il concetto di area, e si vede l'integrale chiaramente come una funzione.

Come esempio di calcolo di un integrale si osservi che:

$$\int \mathbf{x^n\,dx} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n+1}}\mathbf{x^{n+1}} + \mathbf{K}$$

Infatti considerando la derivata come l'operazione inversa dell'integrale, derivando il termine a destra,

(se $y = x^n$ $y' = n\,x^{n-1}$)

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1} + K\right)' = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n$$

Considerazioni finali

Il gran merito di Newton (1642 - 1727) **(15)** [15]e di Leibniz (1646 - 1716) **(16)**[16] consiste nell'aver studiato questi problemi, proponendo degli opportuni schemi di calcolo e di aver riconosciuto chiaramente la connessione tra la derivazione e l'integrazione.

Il procedimento newtoniano però non soddisfaceva al rigore matematico né si fondava su una vera e propria intuizione, mentre invece il nuovo calcolo si mostrò subito uno strumento potentissimo in tutti i rami della matematica.

Leibniz adottò i procedimenti del calcolo di Fermat e di Newton, perfezionandoli; manca anche in lui il concetto di *"limite"* e tende a concepire l'infinitamente piccolo come un *"indivisibile"* di Cavalieri.

Anche il calcolo proposto, infinitamente superiore a quello di Newton, manca di rigore, ma le notazioni introdotte in esso, sono ancora quelle attuali.

Newton e Leibniz sapevano calcolare l'integrale e la derivata, ma i veri e propri fondamenti del calcolo rimasero a lungo oscuri proprio perché, non si era introdotto il concetto di limite.

Gli argomenti trattati furono ulteriormente complicati dall'uso di termini come *"quantità infinitamente piccole"*, *"differenziali"*, *"rapporti ultimi".* La difficoltà con la quale furono abbandonati questi concetti, aveva le sue profonde radici nell'atteggiamento filosofico dell'epoca.

Sembrava ovvio che concetti intuitivi come l'area e l'inclinazione, avessero un significato assoluto in sé stessi, senza dover ricorrere a concetti ausiliari, come i rettangoli iscritti o le secanti e i loro limiti. Il non vedere nel passaggio al limite l'unica definizione scientificamente importante di questi concetti, significa che mancava, nel XVII secolo una tradizione intellettuale che permettesse una così radicale svolta filosofica.

Leibniz, per spiegare la derivata, partiva correttamente dal rapporto incrementale di una funzione $y = f(x)$:

$$\frac{\mathbf{\Delta}\mathrm{y}}{\mathbf{\Delta}\mathrm{x}} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Per indicare il limite di questo rapporto, la derivata che noi scriviamo **f'(x)**, egli scriveva $\frac{dy}{dx}$

Il simbolo di differenziale ***dx*** gli si presentò come un'estensione naturale dei simboli usati per le differenze finite e trovò, per i differenziali una sorprendente analogia con l'ordinario calcolo algebrico e risultarono evidenti le notevoli semplificazioni che la nuova *"algebra"* era in grado di arrecare a tutti i problemi affrontati. Il simbolismo leibniziano, molto efficace, è adatto a descrivere queste nuove situazioni ed è per questo ancora mantenuto.

La confusione intervenne quando Leibniz, introducendo il differenziale dx si esprime circa in questo modo l'*"ultimo valore"* di **Δx** non è zero ma una *"quantità infinitamente piccola"*, un *"differenziale"* indicato con dx. Queste quantità infinitamente piccole erano considerate come una nuova specie di numeri, diversi da zero ma più piccoli di ogni numero positivo del sistema dei numeri reali.

Analogamente l'integrale era considerato una somma di *"infinite quantità infinitamente piccole"* **f(x) dx**.

In realtà se si considera il simbolo **d** soltanto come un simbolo del passaggio al limite, si ha il vantaggio di poter trattare i limiti dei rapporti incrementali e delle somme *"come se"* fossero effettivamente rapporti e somme.

Ai simboli fu attribuito un significato del tutto estraneo al campo della matematica. Se si resiste a questa tendenza, la notazione di Leibniz, rappresenta un'eccellente abbreviazione ed è quasi indispensabile nello studio della teoria.

Attribuire l'invenzione del calcolo infinitesimale a Newton e a Leibniz è un'assurda ed eccessiva semplificazione. Il calcolo è il risultato di una lunga evoluzione che non fu nè, iniziata nè, portata a termine da Newton e da Leibniz nella quale entrambi ebbero una decisiva funzione. **(17)**[17]

L'epoca del rigore per le matematiche moderne doveva ancora tardare, anche perchè, mancava il concetto rigoroso di limite. La revisione critica della nuova analisi avvenne con pieno successo nel XIX secolo. **(18**)[18] Oggi il calcolo può essere insegnato senza alcun mistero.

Anche il calcolo integrale è legato alla soluzione di numerosi problemi in ambiti fisici, ingegneristici, economici ma anche sociali e biologici. In economia permette di trattare problemi legati alla finanza, alla statistica e alla probabilità.

Bibliografia

R. Courant H. Robbins - Che cos'È la matematica - Boringhieri 1988

L. Geymonat - Storia del pensiero filosofico e scientifico - Garzanti 1977 - vol. II

E. T. Bell - I grandi matematici - Sansoni 1990

C. Boyer - Storia della matematica - Mondadori 1990

L. Daboni - Lezioni di matematica generale - Lint 1969

G. Preti - Storia del pensiero scientifico - C.d.E 1980

L. Lombardo Radice - La matematica da Pitagora a Newton - Editori Riuniti 1971

A. Rupert Hall - La rivoluzione scientifica 1500/1800 - Feltrinelli 1976

P. Oriolo A. Coda - Algebra e Informatica - B. Mondadori 1988 vol. I

P. Oriolo A. Coda - Algebra e Informatica - B. Mondadori 1988 vol. II

[1] **(1)** Già nelle opere di Galilei affiorarono più volte argomenti di evidente carattere infinitesimale. Ciò accade quando egli affronta il concetto di *velocità istantanea*. Questa grandezza può essere vista come il rapporto tra lo spazio (percorso dal corpo che si muove) e il tempo (impiegato a percorrere tale spazio) allorché, questo tempo assuma dimensioni infinitamente piccole.

È evidente che questa nozione diventa estremamente oscura quando il tempo diventa infinitesimo, ma non possiamo farne a meno quando vogliamo definire un moto vario, un moto in cui la velocità cambia da un istante all'altro. Galileo si accorge che in un ragionamento del genere deve essere supposta l'esistenza di *"infiniti gradi di velocità"* (cioè di infiniti valori della velocità istantanea) i quali proprio per essere infiniti *"non si consumeranno mai tutti"* e osserva che il punto in movimento può consumarli perché, *"passa solamente"* per ciascuno di tali gradi *"senza dimorarvi un istante"*.

Il singolo *"grado di velocità"* e l'infinità di gradi di velocità sono per Galileo concetti intuitivi; può procedere in modo coerente nel suo discorso (approfondire il concetto di velocità istantanea) solo perché riesce a porli in relazione con altre infinità (punti di un segmento, segmenti che riempiono un triangolo), che in quanto a nozioni intuitive, risultano più manovrabili.

Tali concetti risultano espressi nelle opere: *Dialogo sopra i massimi sistemi* del 1632 e *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* del 1638.

[2] (2) Archimede supponendo di voler calcolare l'area del cerchio, adottò il seguente procedimento: divise il cerchio con un numero di rette parallele di uguale larghezza, tolse le porzioni di curve all'estremità, ottenendo così dei rettangoli e fece la somma di tutti i rettangoli parziali ottenuti.

Aumentando all'infinito il numero delle strisce, ottenne l'area del cerchio.

[3] (3) Bonaventura Cavalieri (1591 - 1647), dell'ordine dei Gesuati, discepolo di Galilei, nella sua opera *"Geometria indivisibilibus continuorum nova quondam ratione promota"* del 1635, ritiene che una figura piana possa essere concepita come formata da linee o *"indivisibili"* e che analogamente un solido possa essere considerato come composto da aree che sono volumi indivisibili.

[4] (4) Giova riportare quanto detto da E.T. Bell: *"Per un moderno tutto è lecito, in guerra, in amore come in matematica, per la maggior parte degli antichi la matematica era un gioco abbastanza curioso che doveva essere giocato strettamente secondo le regole imposte dallo spirito filosofico di Platone. Secondo questi non era permesso di adoperare altro che la riga e il compasso nelle costruzioni geometriche [...] Bisognava che*

Descartes, 1985 anni dopo la morte di Platone, pubblicasse la sua geometria analitica perchè, la geometria si liberasse dalla sua camicia di forza platoniana". Cfr E.T. Bell - I grandi matematici - Sansoni 1990 - p. 30.

[5] (5) Citiamo ad esempio una delle critiche che venivano portate a questo modo di procedere, quella che Guldino (Paul Guldin 1577 - 1643 gesuita svizzero) fa a Cavalieri: *"Che dunque quella superficie sia, e in un linguaggio geometrico possa chiamarsi "tutte le linee di tale figura", ciò a mio avviso non gli sarà concesso da nessun geometra; mai infatti possono essere chiamate superfici più linee, oppure tutte le linee giacchè, la moltitudine delle linee per quanto grandissima essa sia, non può comporre la più piccola superficie. [...] Rispondo che il continuo è divisibile all'infinito, ma non consta di infinite parti in atto bensì soltanto in potenza le quali[parti] non possono essere mai esaurite."*

[6] (6) Non si può dimenticare il grande contributo che i francesi portarono allo sviluppo della matematica: Descartes (la geometria analitica), Pascal e Fermat il più grande matematico del '600, se si prescinde da Newton, il quale studiando massimi e minimi di una funzione, giunse al concetto di grandezze infinitesime.

[7] (7) Anche la successione precedentemente studiata può essere considerata come funzione di un numero intero $\mathbf{a_n = f(n)}$. Vi è una differenza tra il caso di una funzione $\mathbf{f(x)}$ e il caso di una successione $\mathbf{a_n}$. Nel caso di una successione **n** può tendere all'infinito soltanto crescendo, ma per una funzione si può ammettere che **x** tenda all'infinito sia per valori positivi che per valori negativi.

[8] (8) Fino dal tempo di Zenone, il concetto di moto continuo ha eluso i tentativi di una formulazione matematica esatta. Non vi è alcuna difficoltà nel procedere passo passo per una successione discreta di valori.

Ma quando si ha a che fare con una variabile continua x che varia in un intervallo, è impossibile descrivere come **x** possa approssimarsi ad un valore determinato $\mathbf{x_1}$, in modo tale da assumere consecutivamente tutti i valori dell'intervallo.

L'idea intuitiva di continuo ha una realtà psicologica nella mente umana, che non può essere invocata per risolvere il problema trattato.

[9] (9) Pascal per primo mostrò l'importanza, nello studio di una curva di equazione $\mathbf{y = f(x)}$, del suo *"triangolo caratteristico"*, cioè del triangolo rettangolo che ha per ipotenusa la corda che collega i punti **P** e **Q** della curva e per cateti $\mathbf{\Delta x}$ e $\mathbf{\Delta y}$, incrementi rispettivamente dell'ascissa e dell'ordinata, nel passaggio da **P** a **Q**.

Il simbolo Δ(delta) indica semplicemente una differenza finita. È un simbolo operatorio e non deve essere confuso con un numero.

[10] (10) In questo contesto parlando di tangente si può intendere sia la retta che ha un solo punto in comune con il grafico della funzione (tangente geometrica) sia la funzione tangente goniometrica, deve quindi essere ben specificata.

[11] (11) Il limite di una funzione continua per $x \to x_1$ è semplicemente il valore che la funzione assume per $x = x_1$.

[12] (12) Si è visto che se $\mathbf{y = x^2}$ $\mathbf{y' = 2x}$. La derivata prima risulta anch'essa una funzione di x. Per ogni valore di x, la y' rappresenta il valore del coefficiente angolare della retta tangente alla curva di equazione y = f(x) nel punto di ascissa x, ossia la tangente goniometrica dell'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle X.

[13] (13) Leibniz rappresentò simbolicamente il passaggio al limite della somma approssimate $\mathbf{S_n}$ ad **A** sostituendo il simbolo di sommatoria Σ con il simbolo di integrale $\int$ ed il simbolo di differenza **Δ** con il simbolo **d**. Pur essendo la simbologia proposta da Leibniz molto efficace, ad essa si deve attribuire esclusivamente un carattere convenzionale.

Quando non era compreso a pieno il concetto di limite si diceva che la differenza finita Δx fosse sostituita dalla quantità infinitesima dx e l'integrale stesso è la somma di infinite quantità infinitesime f(x) dx.

[14] (14) Newton e Leibniz riconobbero e utilizzarono questo principio fondamentale. Leibniz inoltre trattò per primo il concetto di funzione.

[15](15) Newton espose le sue idee sul calcolo infinitesimale, tra l'altro nei "Philosophiae naturalis principia mathematica" del 1667 e nel "Methodus fluxionarum et serierum infinitorum" pubblicato nel 1742. Egli indicò le "quantità fluenti", di cui x e y erano le flussioni, con x e y .

[16] (16) Una delle opere nella quale Leibniz espose le sue idee sul calcolo differenziale fu "Nova methodus proximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur" del 1684.

[17] (17) Un gruppo di matematici inglesi accusarono Leibniz di aver plagiato le idee di Newton da manoscritti inediti che erano circolati privatamente. Tutto ciò provocò una meschina e amara polemica tra gli inglesi da una parte e i matematici del continente dall'altra.

Risultato di questa polemica, che ebbe un notevole sostegno, anche se coperto, da parte dello stesso Newton, fu che per più di un secolo fu vietata in Inghilterra ogni scoperta fatta sul continente nei campi della matematica pura e applicata e il rifiuto da parte dei matematici inglesi di utilizzare l'algoritmo di Leibniz.

In realtà il lavoro di Newton e di Leibniz nel campo del calcolo, era così importante per lo sviluppo scientifico, che i due uomini giunsero alla risoluzione dei problemi, indipendentemente e quasi nello stesso tempo.

[18] (18) Artefici di questa revisione e dell'impostazione della moderna analisi furono tra gli altri L. Eulero(1707-1783), J.L. Lagrange(1737-1813), F. Gauss(1777-1855), A.L. Cauchy(1799-1857), N.H. Abel(1802-1829), K. Weierstrass(1815-1897), P.G. Dirichelet(1805-1859).