

A1

legge di Planck $\epsilon(f, T) = \frac{hf^3}{c^2} \frac{1}{e^{hf/kT} - 1}$

Si può scrivere $\epsilon(f, T) = \frac{kT}{c^2} f^2 \frac{hf/kT}{e^{hf/kT} - 1}$

facile $\lim_{f \rightarrow 0} \frac{hf/kT}{e^{hf/kT} - 1} = 1 \Rightarrow \epsilon(f, T) = \frac{kT}{c^2} f^2$
(usando De l'Hospital) legge classica.

$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{hf/kT}{e^{hf/kT} - 1} = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{h}{kT} \frac{f}{e^{hf/kT} - 1} = \frac{1}{e^{hf/kT} - 1} = 1$

— o — o —

A2.

Bohr usa un modello planetario dell'atomo con orbite circolari. La forza di Coulomb è la forza centripeta



$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q e}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r}$
l'energia cinetica $K_e = \frac{1}{2} m_e v^2 =$

$= \frac{1}{2} m_e \frac{e q}{4\pi\epsilon_0 m_e} \frac{1}{r} = \frac{e q}{8\pi\epsilon_0 \cdot r}$

l'energia potenziale e^- :

$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e q}{r}$

$\Rightarrow$ l'energia totale (energia di legame)

*2 $E = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e q}{r}$

Bohr quantizza il momento angolare $L = m_e v r_n = n \frac{h}{2\pi} = n \hbar$

$v = \frac{n \hbar}{2\pi m_e r_n} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \frac{e}{\sqrt{m_e r_n}}$

$\Rightarrow \frac{m_e^2 \hbar^2}{4\pi^2 m_e^2 r_n^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m_e r_n} \Rightarrow r_n = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi e^2 m_e} n^2$

$\Rightarrow \boxed{E_n = -\frac{e^4 m_e}{8 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}}$

ecco i livelli energetici dell'atomo di Bohr n n. quantico principale

A3

La meccanica quantistica fa uso di "operatori" al. es.:

$$a) \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad ; b) \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \begin{array}{l} \hat{p} \text{ impulso} \\ \hat{E} \text{ energia} \end{array}$$

$\frac{\partial}{\partial x, t}$ derivato parziale rispetto ad x, t

Diamo una giustificazione di ciò:

Consideriamo una generica onda che si propaga nel tempo e nello spazio (ad es. direzione x)

$$c) \boxed{\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}} \quad \begin{array}{l} \text{(onda libera)} \\ \text{con } k \text{ definito} \end{array} \quad \begin{array}{l} k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ n. d'onde} \\ \omega = 2\pi f \text{ frequenza angolare o pulsazione} \end{array}$$

- Dalla relazione di Planck $E = hf$ si ha $E = 2\pi\hbar \frac{f}{2\pi} = \hbar\omega$

$$\Rightarrow \boxed{E = \hbar\omega}$$

- Dalla relazione di De Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$ $p = \frac{h}{\lambda}$

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = \hbar k \Rightarrow \boxed{p = \hbar k}$$

Applichiamo l'operatore a) a $\psi(x, t)$ c)

$$\hat{p} \psi(x, t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (e^{ikx} e^{-i\omega t}) = -i\hbar (ik) e^{ikx} e^{-i\omega t} = \hbar k \psi(x, t)$$

$\Rightarrow$ ottengo la relazione $p = \hbar k$ quindi giustifico a)

Applichiamo l'operatore b) a $\psi(x, t)$ c)

$$\hat{E} \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (e^{ikx} e^{-i\omega t}) = i\hbar (-i\omega) e^{ikx} e^{-i\omega t} = \hbar\omega \psi(x, t)$$

$\Rightarrow$ ottengo la relazione $E = \hbar\omega$ quindi giustifico b)

Equazione di Schrödinger

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi}$$

H hamiltoniano $H = T + V$
 somma dell'energia cinetica T
 e dell'energia potenziale V

Consideriamo una particella libera $V = 0$ da cui $H \equiv T$

$$H = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2 v^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$$

$$p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad p^2 = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (\text{p agisce 2 volte!})$$

$$H = \frac{-\hbar^2 \partial^2}{2m \partial x^2}$$

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$E \equiv H \quad \text{applicati alla } \psi(x,t)$$

$$\Rightarrow \boxed{i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}}$$

a) Una possibile soluzione è $\psi(x,t)$, la semiotona o l'integrale di so onde, integrate in k con una ampiezza $A(k)$ che modula le onde e le inviluppa. Una buona scelta per $A(k)$ è una gaussiana che centra ed evidenzia molto il pacchetto.

quindi $\psi(x,t) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$ ovvero

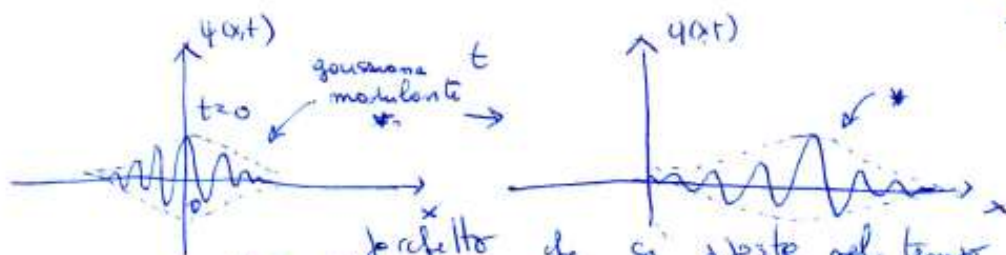
perché $p = \hbar k$
e $\omega = \frac{p^2}{2m\hbar} \Rightarrow \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m}$

$$\psi(x,t) \propto \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t)} dk$$

sceglie $A(k) \propto e^{-(k-k_0)^2}$ ed integra la $\psi(x,t)$

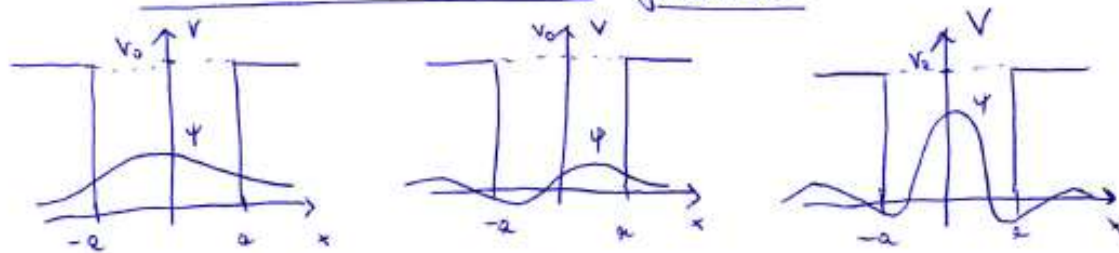
si ha $\psi(x,t) \propto e^{-\frac{(x - v_g t)^2}{2\sigma^2}} e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$

$v_g = \frac{\hbar k_0}{m}$
velocità di gruppo delle onde



$\psi(x,0) = e^{i k_0 x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ pacchetto che si sposta nel tempo $\Rightarrow \psi(x,t) \propto e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} e^{-\frac{(x - v_g t)^2}{2\sigma^2}}$

A5 - Particella in buca di potenziale.



$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < a \\ V_0 & |x| \geq a \end{cases} \quad \begin{matrix} -a < x < a \\ x \leq -a \vee x \geq a \end{matrix}$$

per $-a < x < a$ le eq. di Schrödinger offre soluzioni
per le ψ oscillanti.

per $x \leq -a \vee x \geq a$ le $\psi \approx e^{-kx}$ esponenziale decrescente

con $k = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$

dove E è l'energia della particella quantizzata.

notiamo che per $E=0 \Rightarrow \Delta x=0, \Delta p=0$ (fondobuca)

in contrasto con $\Delta x \Delta p \geq \hbar$

$\Rightarrow$ gli atomi hanno energia minima - compatibile con p.d. indeterminazione. (Energia di Punto zero) anche a $T=0$!

A6.

